

## À REMPLIR PAR LE CANDIDAT

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :
Employeur :		Unité :
Spécialité essais présentée* :	PEXA    PEXH    INE (option Avions)	INE (option Hélicoptères)
(* Rayer les mentions inutiles)		

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION****AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

---

**SESSION DU 16 NOVEMBRE 2015**

---

**PILOTES D'ESSAIS EXPÉRIMENTAUX****INGÉNIEURS NAVIGANTS D'ESSAIS**

---

**ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE**

Durée : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée

Validé par :

NOM :
Date :
Signature :

NOTE :	/ 20
--------	------

**QUESTION N° 1 (2 points)**

A l'aide de l'analyse dimensionnelle, retrouvez  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  dans la formule donnant la fréquence de vibration d'une corde, sachant qu'elle est de la forme :

$$N = K l^\alpha T^\beta \mu^\gamma$$

où : -  $N$  = fréquence de la vibration

-  $l$  = longueur de la corde

-  $T$  = force de tension

-  $\mu$  = masse linéique de la corde

-  $K$  = constante sans dimension

QUESTION N° 2 (4 points)

On s'intéresse à différents chargements d'un avion de transport lors de l'accélération sur piste en vue du décollage.

Partie A :

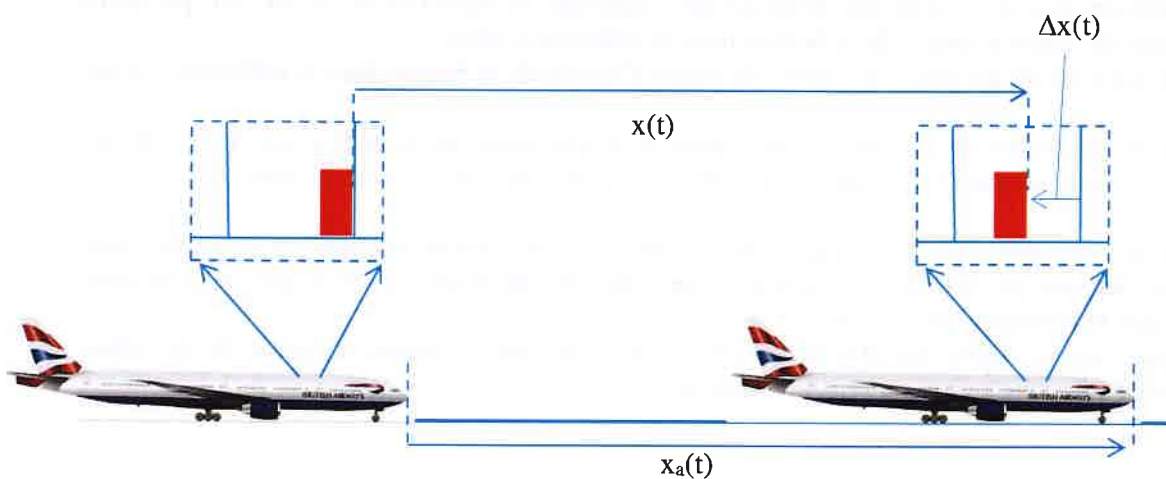
On s'intéresse ici au cas d'un chariot de service non arrimé.

On supposera dans cette partie que le chariot, de masse  $m = 80 \text{ kg}$ , roule sur le plancher de l'avion sans frottement.

A l'instant initial, l'avion est aligné, immobile, au seuil de piste et le chariot est posé à l'avant de la cabine. Ce dernier peut se déplacer de 3 m vers l'arrière de la cabine avant de rencontrer une paroi.

L'avion accélère sur la piste avec une accélération longitudinale qu'on suppose constante  $a_x$ .

On notera  $x_a$  la distance parcourue par l'avion depuis son point de départ sur la piste,  $x$  la distance parcourue par le chariot par rapport à sa position sol d'origine et  $\Delta x$  le déplacement du chariot dans l'avion (positif pour un déplacement vers l'arrière dans l'avion).



A.1) Sachant que l'avion atteint les 100 kt en 19 s à accélération constante, calculer  $a_x$ .

A.2) Dans le référentiel terrestre, quel est le mouvement du chariot dans les premiers instants où l'avion se déplace (par exemple, donnez l'expression de  $x(t)$  pour  $t$  pas trop grand) ? Combien de temps cette expression sera-t-elle valable ?

A.3) Dans le référentiel avion, quel est le mouvement du chariot ?  
On utilisera les notations proposées par l'énoncé.

A.4) On s'intéresse maintenant à la résistance de la paroi.

Dans les conditions du choc, la paroi de la cabine est prévue pour résister sans déformation à un impact dont l'énergie ne dépasse pas 500 J et rompra pour une énergie supérieure à 750 J, énergie calculée dans le référentiel de l'avion.

La paroi de la cabine résistera-t-elle à l'impact, avec ou sans déformation ?

Partie B :

On s'intéresse cette fois à une bobine de câble de 80 kg.

La bobine est représentée par un cylindre de rayon  $R$  et d'inertie  $J$  pouvant rouler sur le plancher de l'avion sans glissement. Le rouleau peut se déplacer sur 3 m avant de rencontrer une paroi.

On notera  $x_a$  la distance parcourue par l'avion depuis son point de départ sur la piste,  $x$  la distance parcourue par la bobine par rapport à sa position sol d'origine,  $\Delta x$  le déplacement de la bobine dans l'avion et  $\omega$  la vitesse de rotation de la bobine autour de son axe de révolution.

B.1) Donner les équations du mouvement (PFD et équation des moments) qui décrivent le déplacement du cylindre.

On précisera le référentiel d'étude choisi. On listera les forces s'exerçant sur le cylindre.

B.2) En exploitant la contrainte de non glissement, trouver une relation géométrique supplémentaire reliant  $\Delta x$  et  $\omega$ .

B.3) En utilisant ces trois relations, éliminer les inconnues et identifier la loi  $\Delta x''(t)$  qui décrit l'accélération du centre d'inertie de la bobine dans le référentiel avion.

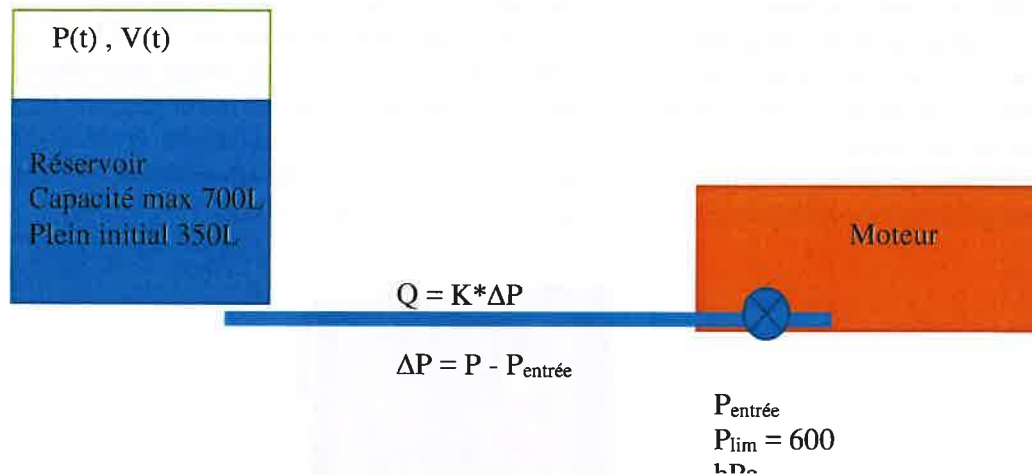
En déduire la loi  $\Delta x'(t)$  qui décrit la vitesse du centre d'inertie de la bobine dans le référentiel avion.

B.4) Dans le référentiel de l'avion (où la vitesse de déplacement de la bobine est  $\Delta x'$ ), calculer l'énergie emmagasinée par le cylindre juste avant qu'il n'entre en contact avec la paroi.

B.5) Dans les conditions du choc, la paroi de la cabine résiste sans déformation à un impact dont l'énergie ne dépasse pas 500 J et rompra pour une énergie supérieure à 750 J, ces énergies étant calculées dans le référentiel de l'avion.

Sachant que l'avion atteint les 100 kt en 19 s à accélération constante, la paroi de la cabine résistera-t-elle à l'impact, avec ou sans déformation ?

QUESTION N° 3 (3 points)



Le réservoir de carburant d'un avion est à moitié vide.  
 Celui-ci, d'un volume total de 700 L, est rempli de 350 L de carburant.  
 Le reste est rempli d'air à pression et température atmosphériques (1013 hPa et 25°C).  
 La mise à l'air libre du réservoir est bouchée (on considère donc que la poche d'air dans le réservoir est étanche et on assimilera l'air à un gaz parfait diatomique  $\gamma = 7/5$ ) et le soutier procède au remplissage du réservoir. Il pompe donc du carburant vers le réservoir à une pression max de 9 bars.

Q 1) En supposant que la poche d'air subit une compression adiabatique réversible durant le remplissage du réservoir, calculer la température du gaz quand la pompe à essence ne permettra plus de remplir le réservoir.  
 Calculer également le volume de carburant ajouté dans le réservoir.

Q 2) L'avion est entreposé dans le hangar pour la nuit à une température de 13°C et l'équilibre thermique finit par se faire (on abandonne ici l'hypothèse adiabatique).  
 L'air dans le réservoir étant supposé être un gaz parfait, quelle va être la pression dans le réservoir ?

Q 3) Le réservoir est connecté au moteur de l'avion par une tuyauterie de section circulaire de rayon R. La tuyauterie est connectée d'un côté au réservoir et de l'autre au moteur.  
 Dans un premier temps, la pompe carburant à l'entrée du moteur n'appelle qu'un débit  $Q_1 = 120$  L/heure, ce qui fait baisser le niveau du réservoir.  
 Calculer la loi de pression de l'air dans le réservoir en fonction du temps (on supposera que la détente de l'air dans le réservoir est cette fois lente et isotherme). On considère encore que l'air est à 13°C.

Q 4) On admettra que le débit volumique Q dans la tuyauterie est proportionnel à la différence de pression  $\Delta P$  entre les deux extrémités de la tuyauterie :  $Q = K \cdot \Delta P$  avec  $K = 1,04 \cdot 10^{-9}$  SI.  
 Donner les unités de la constante K dans le système international (longueur/temps/masse).

Q 5) La pompe à l'entrée du moteur peut assurer le débit  $Q_1$  tant que sa pression d'entrée est supérieure à  $P_{lim} = 600$  hPa. Quand la pression d'entrée atteint ce seuil, la pompe maintient cette pression à l'entrée du moteur et le débit de carburant dépend de la pression dans le réservoir ( $Q = K \cdot \Delta P$ ). Le moteur cale lorsque le débit de carburant est inférieur à  $Q_2 = 20$  L/h.  
 Calculer le volume de carburant restant dans le réservoir au moment où le moteur cale (on supposera encore que la détente de l'air dans le réservoir est lente et isotherme).

QUESTION N° 4 (2 points)

Guillaume vient d'acheter un nouveau congélateur pour pouvoir profiter des glaces. La température dans son cellier est de  $35^{\circ}\text{C}$  et la pression ambiante est de  $1024\text{ hPa}$ . Avant de le brancher, il vérifie que la porte est bien montée. Il peut l'ouvrir et la fermer sans effort. Après l'avoir branché, porte fermée, quand le thermostat monté sur le congélateur lui indique qu'il a atteint une température de  $-18^{\circ}\text{C}$ , il veut ouvrir la porte pour le remplir et se rend compte qu'il doit fournir un effort conséquent. La porte a une dimension de  $60\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ . On considèrera que le congélateur ne contient que de l'air et que celui-ci est un gaz parfait.



Q1) Expliquez pourquoi Guillaume doit forcer pour ouvrir la porte.  
Vous étayez votre explication avec un rapide calcul.

Q2) Guillaume estime l'effort à  $40\text{ daN}$ . Comparez à votre résultat et commentez.

QUESTION N° 5 (6 points)

On se propose d'étudier les performances du planeur « Triscus ».

A) La polaire du planeur

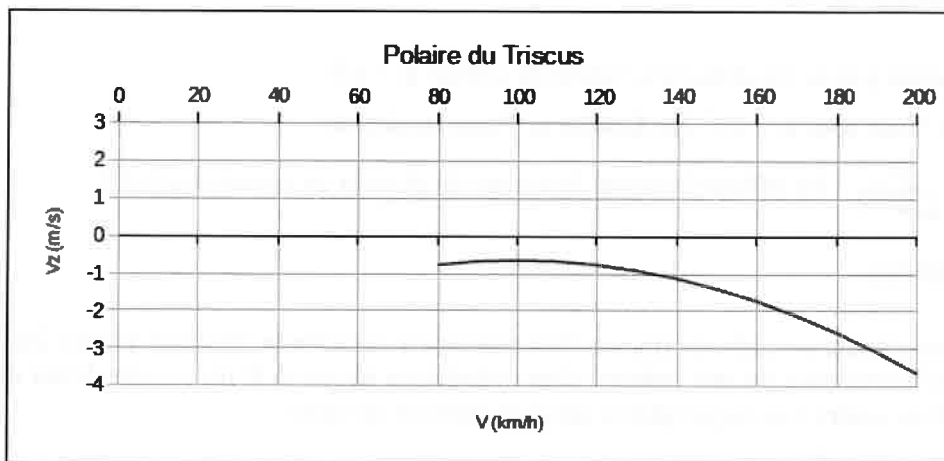
La polaire des vitesses du Triscus représente le taux de chute du planeur en air calme en fonction de sa vitesse par rapport à la masse d'air (air calme, c'est à dire sans mouvement ascendant ni descendant). Elle est modélisée par l'équation du 2ème degré suivante :

$$V_z(V) = a.V^2 + b.V + c$$

$V_z$  vitesse verticale en m/s (toujours négatif)  
 $V$  vitesse air du planeur en km/h.

Application numérique :

$$a = -0,0003 ; b = 0,06 ; c = -3,65.$$



A1). Quel est le taux de chute mini du planeur et à quelle vitesse ?

Taux de chute mini :  $V_z$  minimale, en m/s.

Exprimez sous forme littérale, puis application numérique.

A2). Quel est la finesse maximum du planeur et à quelle vitesse s'obtient-elle ? Quel est l'angle de plané ?

Finesse : distance parcourue par hauteur perdue (sans dimension).

Exprimez sous forme littérale, puis application numérique. Proposez une détermination graphique de la vitesse de meilleure finesse air (schéma ci-dessus).

B) Performance en ascendance

On fait les hypothèses suivantes :

- la vitesse utilisée par le pilote en ascendance est donnée par  $V_{asc} = V_0 \times \sqrt{n}$

avec  $V_0$  : vitesse de taux de chute mini trouvée au A1) ;  $n$  : facteur de charge.

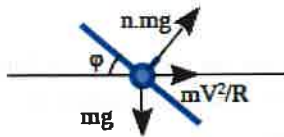
- le taux de chute résultant est :  $V_{zasc} = \sqrt{n} \times V_z(V_{asc})$

où  $V_z(V_{asc})$  est donnée par l'équation de la polaire en A).

Le modèle d'ascendance utilisé donne une inclinaison optimale en spirale de  $\varphi = 45^\circ$ .

Les forces exercées sur le planeur peuvent se simplifier ainsi :

$n$  : facteur de charge  
 $m$  : masse du planeur



$g$  : accélération de la pesanteur ( $g = 9,81$  SI)  
 $V$  : vitesse du planeur en m/s  
 $R$  : rayon de virage.

B1) D'après le schéma ci-dessus :

Donnez la relation entre  $\varphi$  et  $n$ . En déduire la valeur de  $n$  pour  $\varphi = 45^\circ$ .

Donnez la valeur de  $V_{asc}$  pour  $\varphi = 45^\circ$ . En déduire la  $V_{zasc}$  résultante.

Montrez que :  $R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2-1}}$ . En déduire le rayon de virage du planeur en spirale à  $\varphi = 45^\circ$ .

B2) Modèle d'ascendance

On considère maintenant une ascendance (masse d'air montant à une vitesse verticale  $V_{zair}$ ). On fait l'hypothèse que l'ascendance est une colonne d'air cylindrique de rayon  $R_{max}$  et que  $V_{zair}$  dans l'ascendance décroît du centre vers la périphérie selon la formule suivante :

$$V_{zair} = V_{zmax} \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{R^2}{R_{max}^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{R}{R_{max}} \right)$$

avec  $V_{zmax}$  la vitesse verticale max de l'air dans l'ascendance ;  $R_{max}$  le rayon de l'ascendance et  $R$  la distance au centre.

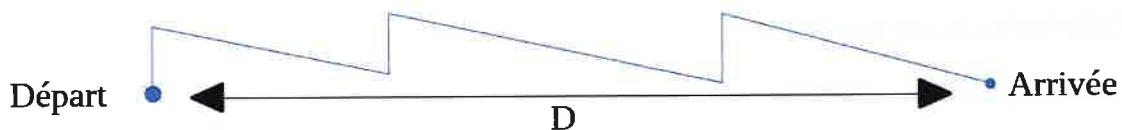
Application numérique :  $V_{zmax} = 4,5$  m/s ;  $R_{max} = 300$  m.

Calculez la  $V_{zair}$  correspondant au rayon de virage trouvé au B1).

En déduire la  $V_z$  totale du planeur dans l'ascendance ( $V_{zasc}$  trouvé au B1).

C) Vitesse de croisière optimale (théorie de Mc Cready)

On considère que le planeur effectue une navigation d'une distance  $D$ .



On cherche à déterminer la vitesse de croisière optimale  $V_{cr}$  en fonction de la  $V_z$  totale moyenne en ascendance espérée  $V_{za}$  (calage appelé « Mc Cready »).

Hypothèses : le planeur parcourt  $D$  à une vitesse  $V$  et s'arrête régulièrement entre temps pour remonter à  $V_{za}$ . L'air est calme en dehors des ascensions. Le taux de chute  $V_z = f(V)$  est donné par l'équation de la polaire en A). Les hauteurs de départ et d'arrivée sont identiques.



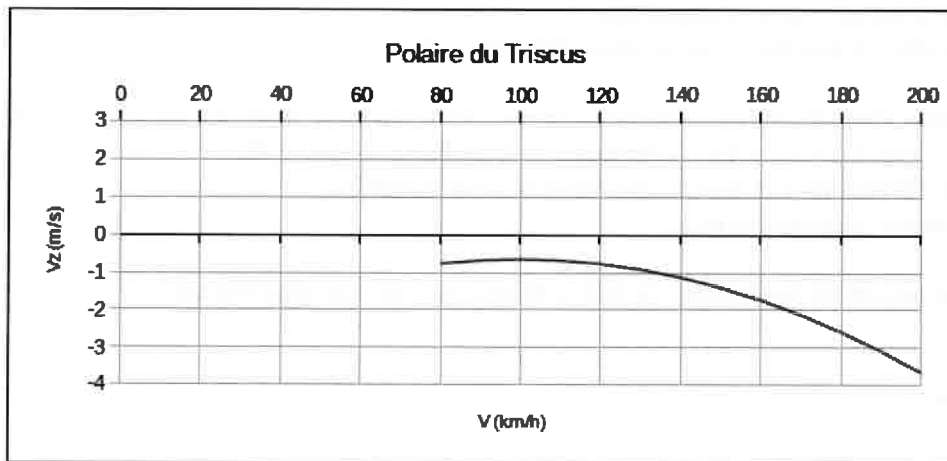
C1). Exprimez les temps  $T_{cr}$  et  $T_a$  passés en croisière et en ascendance en fonction de  $D$ ,  $V$ ,  $V_z$  et  $V_{za}$ .

C2). En déduire  $V_{moy}$  en fonction de  $V$ ,  $V_z$  et  $V_{za}$

(  $V_{moy}$  : vitesse moyenne pour parcourir la distance  $D$  en tenant compte du temps passé en ascendance et en croisière).

Montrez que  $\frac{V_{moy}}{V_{za}} = \frac{V}{V_{za} - V_z}$  et en déduire une détermination graphique (schéma ci-dessous)

de la vitesse moyenne en fonction de  $V_{za}$ , vitesse de montée attendue en ascendances.



C3). Quelle est la vitesse de croisière optimale  $V_{cr}$  pour une vitesse moyenne maximale ? Exprimez  $V_{cr}$  en fonction de  $V_{za}$  et des coefficients de l'équation de la polaire :

$$V_z(V) = a.V^2 + b.V + c .$$

Application numérique :  $a = -0,0003$  ;  $b = 0,06$  ;  $c = -3,65$  ;  $V_{za} = 2,7$  m/s.

Calculez  $V_{cr}$ , le taux de chute résultant  $V_{zcr}$ , la vitesse moyenne  $V_{moy}$  et la finesse de croisière  $F_{cr}$ .

QUESTION N° 6 (3 points)

Un ressort vertical, de masse négligeable et de longueur au repos  $L_R$ , est fixé en son extrémité supérieure.

En son extrémité inférieure, on accroche une masse  $M$  considérée comme ponctuelle.

On appellera  $L$  la longueur du ressort à un instant donné.

- 1) Quelle est la dimension, en unités SI, de la raideur  $k$  du ressort ?
- 2) Quelle est la longueur  $L_E$  du ressort à l'équilibre ?  
Que fait la masse si elle est écartée de sa position d'équilibre ?
- 3) Depuis cette position d'équilibre, on soulève la masse d'une hauteur telle que la longueur du ressort devienne  $L_0$ , avec  $L_R < L_0 < L_E$ . A l'instant  $t = 0$ , on lâche la masse  $M$ .  
Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse  $M$ .  
Résoudre complètement cette équation.
- 4) Quelle est la vitesse maximale atteinte par la masse  $M$  au cours de son mouvement ?

Application numérique :

- $k = 10$  unités SI
- $M = 500$  g
- $g = 10$  m/s<sup>2</sup>
- $L_R = 15$  cm
- $L_0 = 17$  cm

## À REMPLIR PAR LE CANDIDAT

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :
Employeur :		Unité :
Spécialité essais présentée* :	PEXA    PEXH    INE (option Avions)	INE (option Hélicoptères)
(* Rayer les mentions inutiles)		

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION****AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

---

**SESSION DU 14 NOVEMBRE 2016**

---

**PILOTES D'ESSAIS EXPÉRIMENTAUX****INGÉNIEURS NAVIGANTS D'ESSAIS**

---

**ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE**

Durée : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée

Validé par :

NOM :
Date :
Signature :

NOTE :	/ 20
--------	------

EXERCICE N° 1 (1,5 point) :

Le fonctionnement des hélices est décrit par des diagrammes dans lesquels figurent les variables réduites suivantes :

$$\text{Puissance réduite : } \chi = \frac{W}{n \cdot \lambda \cdot \rho^a \cdot D^b \cdot N^c}$$

$$\text{Traction réduite : } \tau = \frac{T}{n \cdot \lambda \cdot \rho^d \cdot D^e \cdot N^f}$$

$W$  : puissance du moteur

$T$  : traction exercée par l'hélice

$D$  : diamètre de l'hélice

$n$  : nombre de pales

$\lambda$  : paramètre permettant de définir la surface de référence d'une pale par la relation :  $S = \lambda \cdot D^2$

$N$  : nombre de tours par minute

$\rho$  : masse volumique de l'air

- 1 - Sachant que, par définition,  $\chi$  et  $\tau$  sont des grandeurs sans dimension, déterminer la valeur des exposants :  $a, b, c, d, e, f$ .
- 2 - Soit  $V$  la vitesse de l'avion par rapport à l'air. On montre que le rendement de l'hélice  $\eta$  (rapport entre la puissance sur l'arbre d'hélice ( $V \cdot T$ ) et la puissance du moteur  $W$ ) est lié à  $\tau$  et  $\chi$  par la relation :  $\eta = \gamma \cdot \tau / \chi$ .  
Quelle est la dimension de  $\gamma$  ?

EXERCICE N° 2 (1,5 point) :

- 1) Montrer qu'une pression de 1,013 bar « équivaut » à 2116 livres-force/pied carré

$$1 \text{ livre-force} = 4,448 \cdot 10^{-1} \text{ daN}$$

$$1 \text{ pied (foot)} = 3,048 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^3 \text{ hPa}$$

- 2) En déduire le facteur de conversion entre, d'une part, la valeur de l'unité de masse (le « slug ») dans le système « *British Engineering Units* » (*slug, ft, s*) cohérent (i.e. permettant de se passer de constantes de conversion dans les équations de la physique) et, d'autre part, le kg du système international.

EXERCICE N° 3 (3 points) :

Déterminer la force constante agissant sur un avion embarqué Super-Etendard de 12,5 tonnes dans les cas suivants :

1. Il est accéléré du repos jusqu'à 250 km/h en 2,2 s au catapultage.
2. Il est freiné de 180 km/h jusqu'au repos en 40 m par un brin d'arrêt accroché par sa crosse d'appontage (le mouvement de l'avion est dans la direction positive de l'axe des  $x$ ).

EXERCICE N° 4 (2,5 points) :

Note :

- a) on se contentera de calculer les pourcentages avec un seul chiffre après la virgule (ex : 18,6 %).
- b) les questions 3 et 4 sont indépendantes.

L'assemblage de la station spatiale internationale (ISS) a nécessité, hors visites d'équipages et vols de ravitaillement dédiés, 29 lancements permettant sa pleine exploitation (capacité initiale opérationnelle - *Initial Operational Capability*), se décomposant ainsi :

- 2 lancements de fusée « Proton-K » russe;
- 2 lancements de fusée « Soyouz » russe;
- 25 lancements de navettes spatiales américaines (« *Space Transportation System* »), partiellement réutilisables et toutes pilotées par un équipage.

A la date du premier lancement de la séquence d'assemblage de l'ISS par une fusée « Proton-K » en Novembre 1998, la fiabilité de ces différents lanceurs s'établissait comme suit :

- Proton-K : 5 échecs partiels (orbite prévue non atteinte) ou totaux (destruction du lanceur) sur les 76 derniers lancements depuis 1990.
  - Soyouz : taux de succès de 97,5 % pour les différentes versions après ~1500 lancements.
  - STS : 92 lancements depuis l'origine dont 1 échec partiel (orbite trop basse), et 1 échec total (destruction de *Challenger* et perte de l'équipage au lancement en 1986).
- 1) Quelle était alors la probabilité de pouvoir acheminer en orbite sans échec au lancement l'ensemble de ces 29 éléments en vue de leur assemblage pour espérer atteindre l'IOC ?

Le premier lancement d'un élément de l'ISS par la navette spatiale eut lieu lors de son 93<sup>e</sup> vol. La navette Columbia fut perdue avec son équipage lors du 113<sup>e</sup> vol STS en 2003, lors de la rentrée atmosphérique, alors que restaient encore à effectuer pour atteindre l'IOC :

- 1 lancement de fusée « Soyouz » dédié, et
  - 15 vols de navettes spatiales dédiés, sans transfert possible sur un autre lanceur.
- 2) Quelle était, lors de la reprise des opérations de lancement des éléments de l'ISS en 2006, la nouvelle probabilité de pouvoir atteindre l'IOC sans nouvel échec au lancement ?
  - 3) Aucun nouvel incident ou accident n'a été à déplorer jusqu'à la 135<sup>e</sup> et dernière mission de la navette spatiale, ni sur la fusée Soyouz, mais une série d'échecs a ramené la fiabilité démontrée du Proton-K à 86,9%.  
Sachant que le premier lancement (cœur de l'ISS) était critique et que lancer un exemplaire identique de rechange déjà construit était possible (toujours sur Proton-K), quelles étaient rétrospectivement les chances de pouvoir acheminer en orbite le matériel nécessaire à l'IOC ?
  - 4) L'ISS pesait environ 450 tonnes à l'IOC. La fusée *Saturn V*, capable de satelliser 140 tonnes dans les mêmes conditions, a connu 12 lancements réussis sur 13 (1 échec partiel).  
En considérant que toutes les opérations d'assemblage orbital et de mise en œuvre post-lancement se soient parfaitement déroulées (comme pour l'ISS), quelle aurait été la probabilité d'atteindre l'IOC d'une station orbitale équivalente en masse (mais d'une architecture différente) ?

EXERCICE N° 5 (3 points) :

Un avion de masse  $m$  effectue un atterrissage de la façon suivante : à l'impact, à vitesse  $V_0$  au début de la piste, le pilote maintient le nez haut pour profiter de la décélération aérodynamique. Les moteurs sont réduits et la poussée est nulle.

A la vitesse  $V_1$ , le pilote pose le train avant et freine. La phase transitoire est supposée instantanée.

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- a) dans la phase nez haut, la force de freinage due au contact train-piste est négligeable ;
- b) dans la phase freinée, la traînée aérodynamique devient négligeable devant la force des freins.

On donne :

- $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$
- masse de l'avion à l'atterrissage  $m = 75000 \text{ kg}$
- surface de référence de l'avion  $S = 250 \text{ m}^2$
- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $\mu_{\text{freinage}} = 0,255$  pour une piste sèche
- vitesse à l'impact  $V_0 = 75 \text{ m/s}$
- $C_x$  de l'avion nez haut = 0,1

- 1) Calculer la longueur d'arrêt dans les deux cas suivants :
  - piste sèche, train avant posé à  $V_1 = 63,9 \text{ m/s}$
  - piste sèche, train avant posé à  $V_1 = 59 \text{ m/s}$Dans les deux cas, comparez l'énergie absorbée par les freins.
- 2) Existe-t-il une vitesse  $V_1$  optimale pour laquelle la distance d'atterrissage est minimale ? Quelle est la distance minimale ?
- 3) Mêmes questions si la piste est mouillée et si le coefficient de freinage n'est plus que de  $\mu = 0,102$ .

EXERCICE N° 6 (1,5 points) :

Un avion après décollage par vent nul peut monter avec une pente de 18 %, en tenant sur sa trajectoire une vitesse par rapport à l'air de 150 kt.

Il doit décoller d'une piste dans l'axe de laquelle se trouve une colline de 500 m de hauteur par rapport au terrain, située à 3 km du point de décollage.

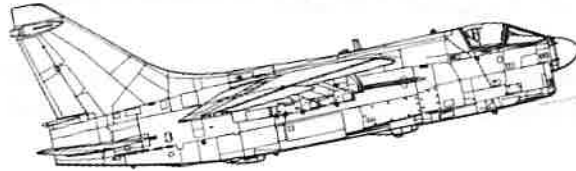
1 - Sachant qu'il est tenu par le contrôle de poursuivre son décollage dans l'axe, quelle doit être la force du vent de face pour qu'il passe à 150 m au-dessus du relief ?

2 - Que se passerait-il si, après le décollage, le vent était arrière avec une force de 12 kt ?

EXERCICE N° 7 (7 points) :

Note : la partie c) et certaines questions peuvent être traitées indépendamment.

On peut répondre sur feuilles séparées, à condition de bien indiquer pour chaque question dans l'énoncé à quelle(s) feuille(s) se référer.



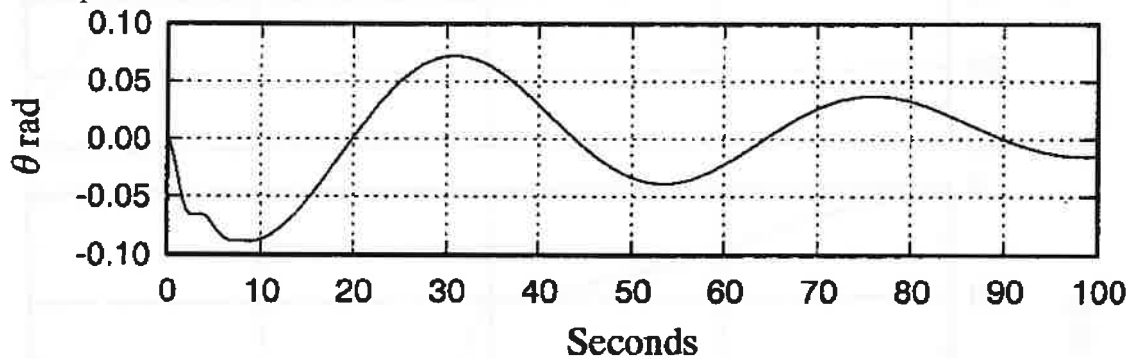
a) Avion naturel (9/20<sup>e</sup> de la note totale de l'exercice)

On peut déterminer, à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées, la fonction de transfert longitudinale d'un aéronef en assiette  $\theta$  pour une sollicitation en profondeur  $\eta$ . Elle s'écrit de manière générale comme suit ( $s$  est la variable de Laplace) :

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = \frac{K_{\theta}(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2)}$$

Considérons un avion A-7A Corsair II volant en palier stabilisé à 15000 ft et Mach 0,3 .

La réponse temporelle de cet avion, non asservi, à un échelon de 1° de la gouverne de profondeur se traduit par la courbe suivante :



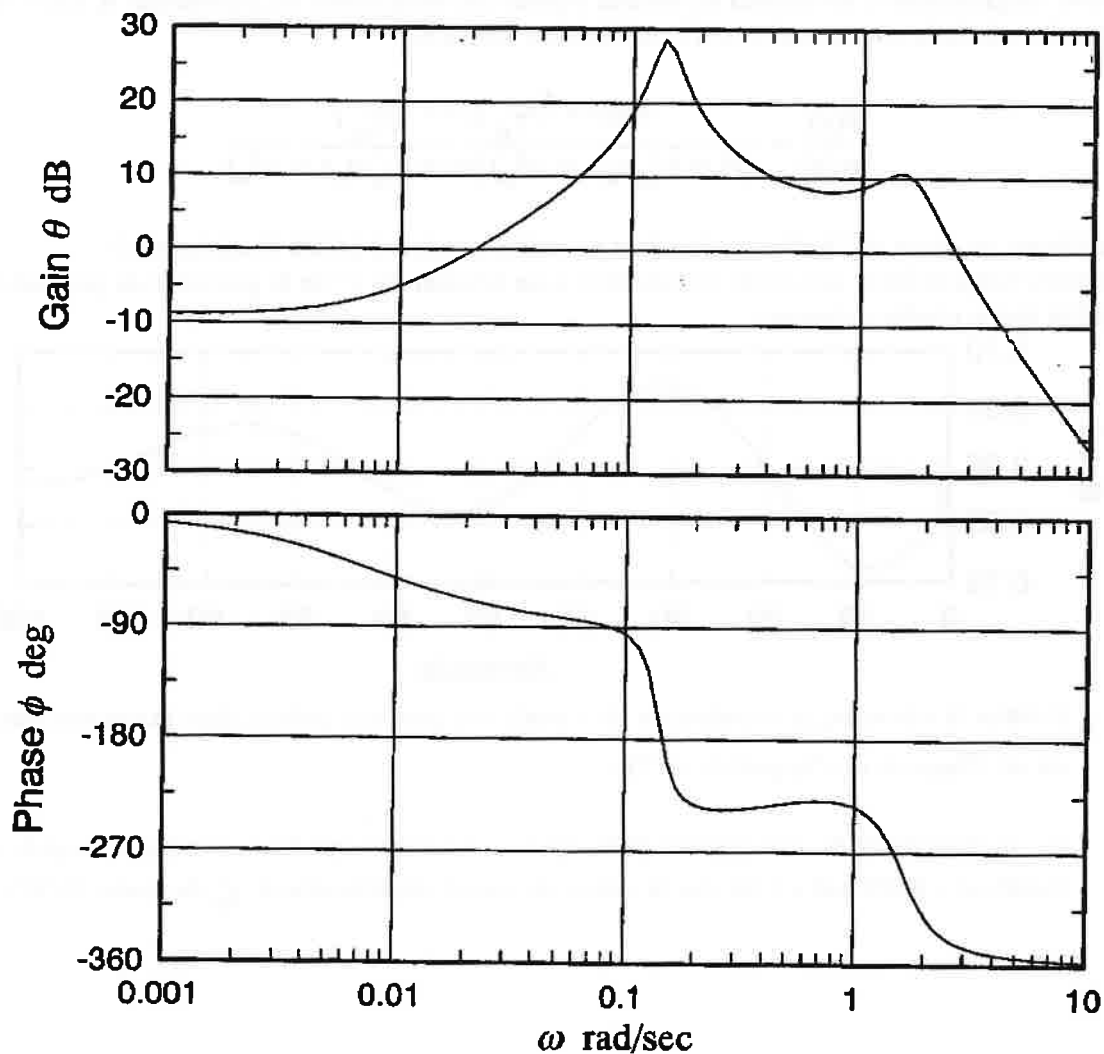
- Estimer la valeur  $\omega_p$  de la pulsation du « mode » le plus lent présent dans la réponse (mode dit de *Phugoïde* ou *Phygoïde*). (1/20<sup>e</sup>)
- Au vu de la durée de convergence de la réponse, on estime que l'amortissement total de ce mode est  $\sim 0.033$  rad/s. Calculer la valeur du taux d'amortissement  $\zeta_p$  du mode. (1/20<sup>e</sup>)

L'autre mode superposé est dit « mode d'incidence » ou de « période courte » (s pour *short*) et ne peut être aisément visualisé sur la réponse temporelle ci-dessus. Après un travail plus poussé d'identification en vol, le gain  $K_\theta$ , les constantes de temps  $T_{\theta_1}$  et  $T_{\theta_2}$  et les caractéristiques du mode d'incidence sont données et telles que :

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = \frac{-4.516(s - 0.008)(s + 0.506)}{(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 0.902s + 2.666)} = \frac{N_\theta(s)}{\Delta(s)}$$

$\theta$  vaut zéro degrés initialement (on s'intéresse aux perturbations autour de la moyenne, inconnue)  
 - calculer la valeur stabilisée de  $\theta$  pour cet échelon unitaire de profondeur. (1/20°)

La réponse fréquentielle de cet avion dans les conditions présentes de vol peut être synthétisée sur un diagramme de Bode, présentant gain (amplitude relative) et phase (avance ou retard).



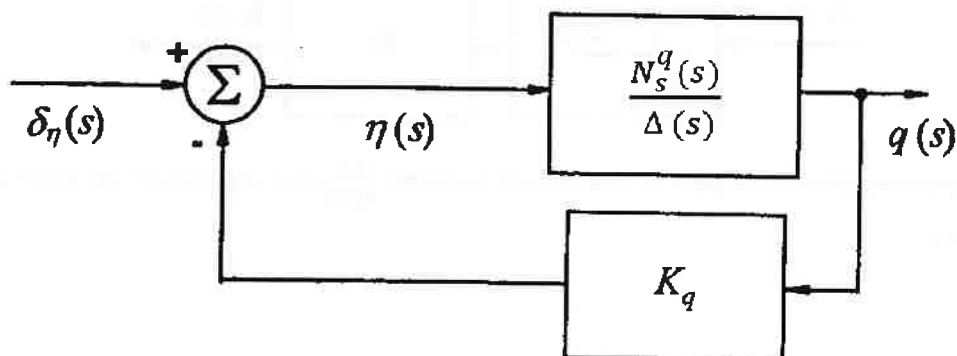


- Placer les pulsations des modes et préciser en quoi l'un des modes présente un risque d'instabilité (1/20<sup>e</sup>)
- Pour quelle raison n'a-t-on pas constaté de divergence sur la réponse temporelle  $\theta(t)$  ? (1/20<sup>e</sup>)
- Si divergence il devait y avoir, vous semble-t-elle compensable par le pilote ? (1/20<sup>e</sup>)
- Quelle sollicitation simple en profondeur permettrait en vol d'établir ce diagramme de Bode ? (1/20<sup>e</sup>)
- Déterminer et représenter sur le diagramme de Bode la bande passante à -3 dB (relativement au gain constaté aux basses fréquences), les marges de phase et de gain. (1/20<sup>e</sup>)

Pour permettre un pilotage plus précis à ces faibles vitesses, on se propose de réaliser un asservissement simple (proportionnel), non pas sur l'assiette  $\theta$ , mais sur la vitesse angulaire en tangage  $q$

- Ecrire l'équation  $\frac{q(s)}{\eta(s)}$  en boucle ouverte (avion naturel, non asservi), de manière littérale, puis numérique (3 chiffres significatifs après la virgule sont suffisants). (1/20<sup>e</sup>)

b) Avion asservi (10/20<sup>e</sup>)



- Pourquoi le signe du gain doit être négatif pour cet avion et cette structure d'asservissement et quelle est son unité ? (1 /20<sup>e</sup>)

On peut réécrire la fonction de transfert de l'avion naturel (non asservi)  $\frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{N_s^q(s)}{\Delta(s)}$  :

- En déduire l'expression littérale de l'avion asservi  $\frac{q(s)}{\delta_\eta(s)}$  en fonction de  $N_s^q(s)$ ,  $\Delta(s)$  et  $K_q$  (1/20<sup>e</sup>)

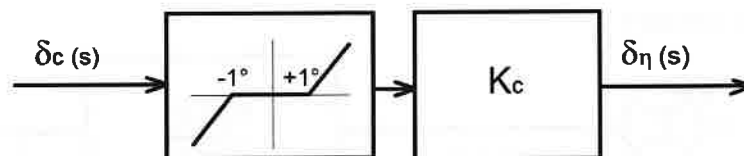
- Mettre cette équation sous la forme  $\frac{N(s)}{\Delta_{BF}(s)}$  (avec  $|N| \neq 1$ ) et écrire la nouvelle équation caractéristique de l'avion asservi  $\Delta_{BF}(s)$  (*Boucle Fermée*) sous la forme polynomiale  $As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E$ , puis donner l'expression de ses coefficients en fonction des valeurs numériques trouvées précédemment et de  $K_q$  (3/20<sup>e</sup>)

On montre qu'on peut écrire :  $\Delta_{BF}(s) \approx A(s^2 + \frac{CD-BE}{C^2}s + \frac{E}{C})(s^2 + \frac{B}{A}s + \frac{C}{A})$  pour décrire un système « réduit » au comportement équivalent.

- Calculer les valeurs des coefficients pour des valeurs de  $K_q$  de zéro et -1, en déduire les nouvelles valeurs de  $\zeta_p$ ,  $\omega_p$ ,  $\zeta_s$  et  $\omega_s$  (2/20<sup>e</sup>)
- Que valent ces 4 valeurs lorsque  $K_q$  tend vers moins l'infini ? Les modes d'incidence et de Phugoïde deviennent-ils ainsi sous-amortis, sur-amortis ou critiques ? ( $\zeta \rightarrow 1$ ) (3/20<sup>e</sup>)

c) Avion pourvu de son dispositif de commandes de vol

L'aéronef présente une zone « morte » de  $\pm 1^\circ$  entre la déflexion de la commande (manche)  $\delta_c$  et le déplacement effectif de la gouverne  $\delta_\eta$  (la stricte proportionnalité étant retrouvée au-delà et en-deçà), que l'on peut transcrire par un ensemble de blocs en amont du sommateur  $\Sigma$  sur le schéma d'asservissement précédent tel que :



- Que peut-on dire concernant la fonction de transfert  $\frac{q(s)}{\delta_c(s)}$  et le diagramme de Bode associé ? (1/20<sup>e</sup>)

## À REMPLIR PAR LE CANDIDAT

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :
Employeur :		Unité :
Spécialité essais présentée* :	PEXA    PEXH    INE (option Avions)	INE (option Hélicoptères)
(* Rayer les mentions inutiles)		

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION****AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

---

**SESSION DU 13 NOVEMBRE 2017****PILOTES D'ESSAIS EXPÉRIMENTAUX****INGÉNIEURS NAVIGANTS D'ESSAIS**

---

**ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE**

Durée : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée.

Validé par :

NOM :

Date :

Signature :

NOTE :

/ 20

EXERCICE N° 1 (1 point) :

Dans un gaz à haute température (où les phénomènes thermiques ne peuvent plus être négligés), le nombre de Prandtl est un paramètre de similitude sans dimension qui peut être vu comme un indicateur de l'importance relative des phénomènes aérodynamiques par rapport aux phénomènes thermiques. Comme les nombres de Mach, Reynolds etc., la similitude des phénomènes physiques observés (par exemple entre des conditions de vol réelles et en soufflerie) n'est possible que pour des valeurs proches de Pr caractérisant les deux environnements.

$$Pr = \mu \cdot \lambda^a \cdot C_p^b$$

Où :

$\mu = \nu \cdot \rho$  ( $\rho$  est la masse volumique)

$\nu$  est la viscosité cinématique en  $m^2/s$

$\lambda$  est la conductivité thermique en  $W/(m.K)$

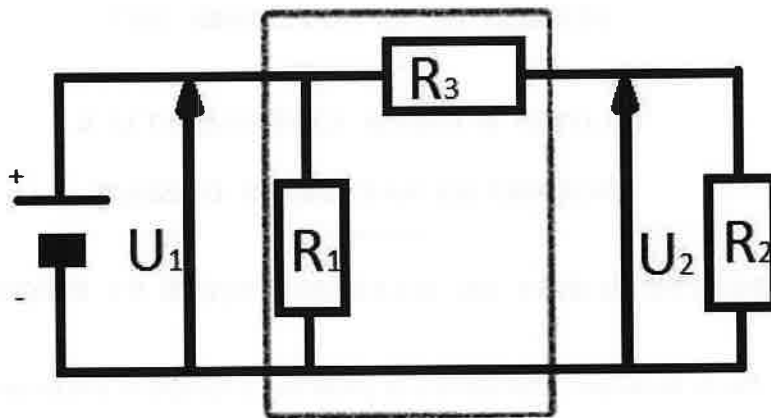
$C_p$  est la capacité thermique massique (ou « chaleur massique ») du gaz à pression constante

(On rappelle que  $C_p - C_v = R = P/(\rho.T)$  conformément aux lois de Mayer et de Boyle-Mariotte)

Déterminer les valeurs respectives des coefficients a et b.

EXERCICE N° 2 (1,5 point) :

On représente couramment la réponse d'un système (sortie) par rapport à une entrée selon une échelle logarithmique (gain en décibels  $G_{dB}$ ).



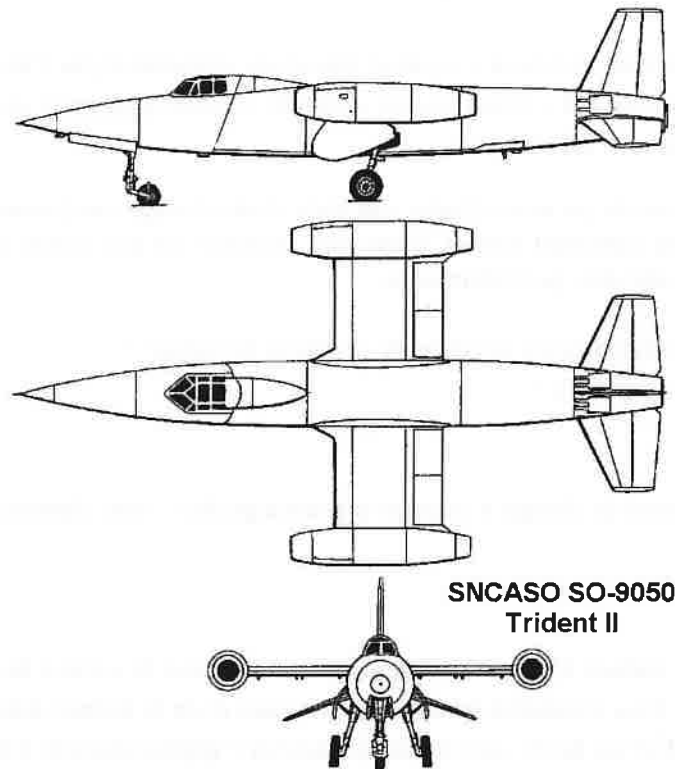
Soit un dispositif résistif quelconque à l'entrée duquel on applique une tension  $U_1$  correspondant à un courant d'intensité  $I_1$ , et aux bornes duquel on mesure la tension  $U_2$  et le courant de sortie  $I_2$  (ce qui implique au minimum, et suivant le type de courant, une résistance -ou impédance- équivalente  $R_2$  branchée aux bornes du dispositif).

On fait varier continuellement et de manière périodique le signal  $U_1$  et on mesure la réponse  $U_2$  pour différentes fréquences, en commençant par les plus lentes.

- Sachant par définition que le gain en Puissance s'exprime comme  $G_{dB}^P = 10 \cdot \log(P_2/P_1)$ , quelle est la relation entre le gain en Amplitude et celui en Puissance ?
- Quelle pourrait être sa définition ? Justifier votre affirmation.

EXERCICE N° 3 (5 points) :

Le retour du Trident



Contexte :

Devant la prolifération de menaces aériennes et balistiques imposant des temps de réaction très courts et des distances importantes à parcourir, l'Etat-Major des Armées et la DGA ont décidé de revisiter le concept issu de la fin des années 1950 d'intercepteur « Trident » à propulsion mixte (deux réacteurs aux extrémités d'ailes et un moteur fusée en propulsion centrale).

On démontre que la meilleure pente de montée d'un aéronef à réaction s'effectue à l'incidence de finesse maximale de l'avion  $f_{\max} = (C_z/C_x)_{\max}$ , qui est aussi l'incidence à laquelle la traînée est minimale. C'est l'option retenue pour permettre à l'appareil de prendre une trajectoire globalement orientée selon son cap d'interception, et passer le mur du son sans empreinte perceptible au sol, lorsque la poussée vient à excéder le poids et la traînée de la machine selon une trajectoire de plus en plus verticale (après consommation d'une certaine quantité de carburant/comburant).

Le Trident V est conçu de telle manière (profil et calage/incidence de l'aile principalement) que lorsque la pente maximale réalisable au décollage à  $M_{\text{TOM}}$  est réalisée, l'incidence de l'avion soit nulle (pas nécessairement celle de l'aile). Dans ces conditions, le vecteur vitesse, la ligne de foi du fuselage et les poussées des 3 moteurs sont coplanaires et l'assiette géométrique de l'avion est donc considérée comme égale à la pente.

Note : les deux parties (A et B) de l'exercice sont indépendantes

A) Lancement (on considère les poussées et la masse du Trident  $M_{TOM}$  constantes)

- 1) Donner l'expression et calculer la pente maximale atteignable par l'avion au décollage.  
On fera l'hypothèse des « petits angles » pour le cosinus dans cette seule question et il est demandé de faire un schéma.

Pour minimiser la masse de cet avion-fusée, son train d'atterrissage est dimensionné pour la fin de sa mission, avec peu de carburant restant. Il est donc accéléré sur une rampe en sortie de laquelle il atteint les conditions calculées précédemment.

- 2) Quelle doit être la portance développée en sortie de rampe ?  
Que vaut alors la traînée ?
- 3) Calculer le facteur de charge  $n$  (rapport portance/poids) – sans dimension – en sortie de rampe.
- 4) Sachant que la traînée d'un aéronef peut être vue comme la somme de la traînée de profil (de coefficient  $C_{x0}$ , considéré ici comme constant) et de la traînée induite par la portance (de coefficient  $K \cdot C_z^2$  où  $K \ll 1$  est constant), justifier l'approximation  $C_z = f_{max} \cdot C_{x0}$  pour des calculs initiaux.
- 5) Considérant un lancement au niveau de la mer en conditions standards, calculer la vitesse nécessaire et minimale en sortie de rampe de l'intercepteur.

On accélère l'intercepteur sur la rampe grâce à une catapulte électromagnétique qui fournit constamment un surcroît d'accélération longitudinal de  $2g_0$  sur une première partie horizontale jusqu'à obtenir la vitesse précédemment calculée puis, selon un tremplin assimilé à un arc de cercle, assure le maintien de cette vitesse jusqu'à la sortie de la rampe à la pente calculée précédemment.

- 6) Considérant la poussée fournie comme constante en module, proposer un bilan des forces et estimer la longueur minimale de la rampe horizontale.
- 7) Calculer le rayon de courbure constant\* de la rampe pour maintenir une accélération centripète ne dépassant pas  $3g_0$ .
- 8) Faire le bilan des distances et temps de parcours de ces deux segments ainsi que la longueur totale d'envol.
- 9) Calculer la hauteur totale de la rampe (là où le Trident est libéré) et commenter brièvement le résultat.

\* dans les faits, on aurait un rayon de courbure progressif pour limiter le « jolt » (dérivée de l'accélération centripète qui, passant ici instantanément de nulle à  $3g_0$ , est en théorie infinie)

## B) Montée et gestion de l'énergie et de la propulsion mixte

On suppose une détente parfaite des gaz, la poussée du M-88 se réduisant alors au débit massique multiplié par la différence des vitesses ( $V_{jet}$  et  $V$ ) où  $V$  est assimilée à la vitesse de l'aéronef.

- 1) Connaissant les caractéristiques du moteur, estimer la vitesse  $V$  correspondant aux données « nominales » publiées dans des conditions standard au niveau de la mer.
- 2) En déduire la vitesse d'éjection des gaz  $V_{jet}$  du M-88 (on la considèrera comme constante)

Le Trident ayant pris son cap d'interception, il poursuit sa montée selon une pression dynamique constante estimée à 30kPa, afin de permettre aux moteurs M-88 de fonctionner dans les meilleures conditions possibles, tout en se rapprochant de la menace.

- 3) A quelle altitude la poussée combinée des réacteurs ne sera plus que la moitié de celle du moteur fusée (cette dernière étant considérée comme constante) ?  
On utilisera la relation  $\rho/\rho_0 = (20-H(\text{km}))/(20+H(\text{km}))$
- 4) En déduire la vitesse de vol et le Mach à cette altitude (pour le calcul de la vitesse du son, on prendra  $\gamma = 1.4$  et  $R = 287$  Unités S.I.). On considèrera l'atmosphère comme standard (15°C au niveau de la mer, décroissance de 2°C par 1000 ft et constante à partir de 11 km d'altitude)
- 5) En termes énergétiques, quelles sont les parts respectives d'énergie potentielle et cinétique à ce point de la montée dans le bilan total ?
- 6) L'objectif étant à ce stade de maximiser la prise d'énergie (énergie totale), pour permettre un tir d'engin dans les meilleures conditions (les autres paramètres de la mission n'étant pas limitatifs), est-il physiquement préférable d'accélérer davantage ou de monter plus haut (argumenter brièvement) ?

Accélération de la pesanteur :	$g_0$	= 9.81 m/s <sup>2</sup>
Masse volumique de l'air au niveau de la mer (décollage)	$\rho_0$	= 1.225 kg/m <sup>3</sup>

#### Trident V (cellule)

---

Longueur :	$L$	= 32.7 m
Envergure totale (hors nacelles moteur, non portantes) :	$b_{aile}$	= 11.43 m
Surface Alaire (référence des coeffs aérodynamiques) :	$S_{REF}$	= 62.25 m <sup>2</sup>
Corde moyenne :	$c$	= 5.44 m
Allongement :	$A$	= 2.10
Masse maximale au décollage :	$M_{TOM}$	= 33240 kg
Masse à vide (avec armement et carburant résiduel) :	$M_{ZFM}$	= 16395 kg
Coefficient de traînée à portance nulle (subsonique) :	$C_{X0sub}$	= 0.038 (référence $S_{REF}$ )
Finesse maximale (subsonique) :	$f_{max}$	= 5.8

#### Moteur M-88

---

Poussée unitaire pleins gaz avec post-combustion :	$F_{M88-PC}$	75000 N
Poussée unitaire pleins gaz « secs » :	$F_{M88-sec}$	50000 N
Consommation spécifique pleins gaz avec post-combustion :	$SFC_{PC}$	4.72E-05 kg/(N.s)
Consommation spécifique pleins gaz « sec » :	$SFC_{sec}$	2.22E-05 kg/(N.s)
Débit d'air nominal (@ 100% RPM) :	$Q_{M88}$	65 kg/s
Diamètre du Fan	$D_{fan}$	0.696 m
Taux de compression	$\tau_c$	24.5 :1
Taux de dilution	$\tau_D$	0.3 :1
Température d'entrée turbine	$\tau_T$	1850 K

#### Moteur-fusée Vinci

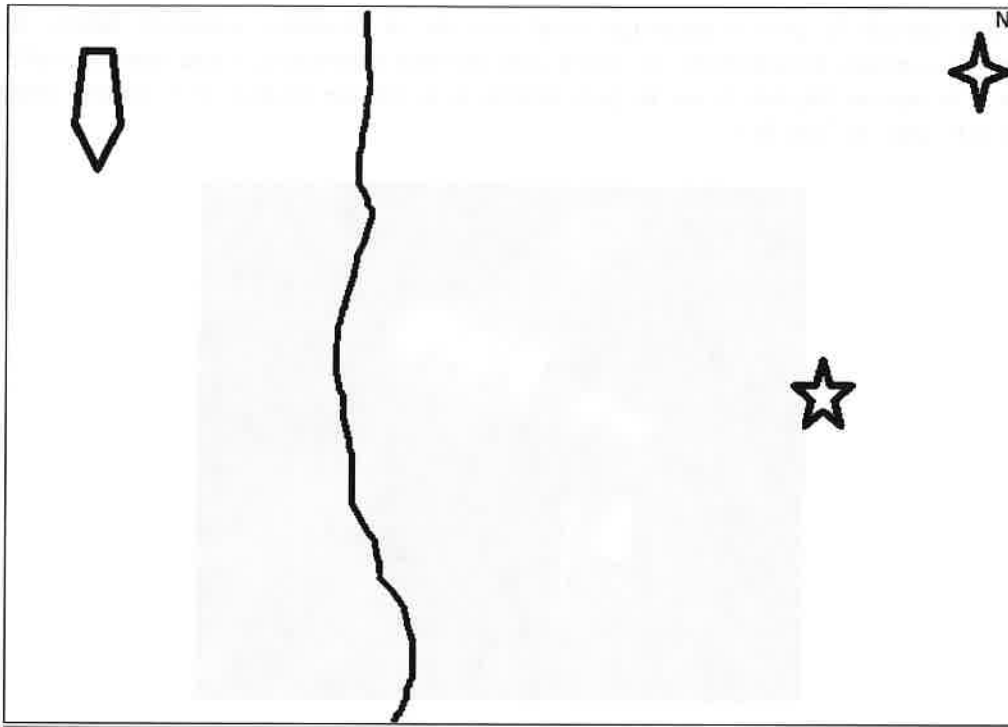
---

Poussée unitaire	$F_{VINCI}$	150000 N
Stoechiométrie LOX/LH2 (en masse)	$\tau_{LOX/LH2}$	5.8:1
Pression de chambre	$P_{chambre}$	6.08E+06 Pa
Impulsion spécifique	$I_{SP}$	465 s
Vitesse d'éjection des gaz	$V_{eVINCI}$	4562 m/s
Ratio d'expansion de tuyère	$\tau_{nozzle}$	240:1
Puissance de la turbopompe LOX	$P_{WLOX-TP}$	3.50E+05 W
Puissance de la turbopompe LH2	$P_{WLH2-TP}$	2.40E+06 W



EXERCICE N° 4 (2,5 points) :

Carrier Command



Un bâtiment de projection et de commandement, assisté d'un groupe de soutien (en haut à gauche sur le dessin) fait route à la vitesse de 20 nœuds et à 200 milles marins au large, parallèlement à la côte sensiblement Nord-Sud d'un pays à problèmes. Et c'est là que vous intervenez en tant que planificateur de mission.

Son groupe aéromobile embarqué doit exfiltrer des prisonniers dans un camp situé à 500 milles marins à l'intérieur des terres (représenté par l'étoile à cinq branches sur le dessin). Il disposera de 30 minutes maximum sur zone pour mener à bien l'opération, avant que d'éventuels renforts appelés par les gardes du camp ne viennent compliquer la situation. Cette durée ne peut être étendue pour conserver des marges en autonomie carburant compatibles d'alea divers (météo, menaces, etc.). On la considèrera comme nominale (par exemple, exactement 30 minutes seront passées sur zone), pour la planification de la mission.

Le groupe aéromobile est constitué, entre autres, de drones et d'hélicoptères hybrides à grande vitesse, fixant la vitesse d'avancement du dispositif autour de 240 nœuds.

Au moment où le dispositif arrivera sur zone (camp de prisonniers), le groupe naval sera exactement à l'ouest du camp (relèvement 270°) et gardera le même cap jusqu'à la récupération des aéronefs.

L'arrivée sur zone est prévue à 03h00 du matin (heure locale).

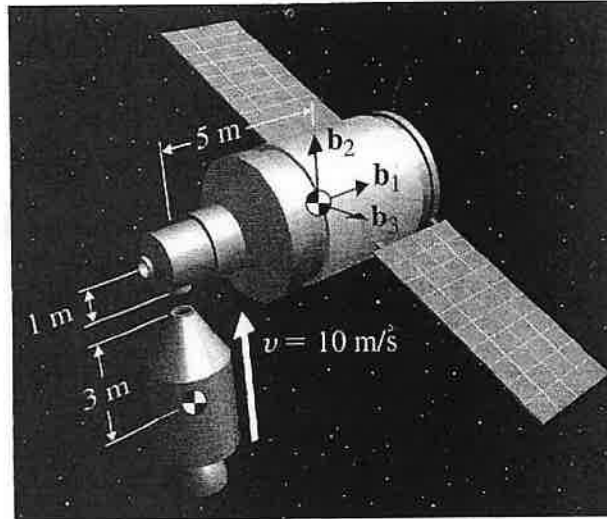
Déterminer les grandes lignes et la timeline de l'opération (en heures locales, sans vent):

- l'heure de décollage du dispositif
- La route à prendre à l'aller
- L'heure de franchissement de la côte à l'aller ET au retour
- La route de retour
- L'heure de la récupération (entrée dans la zone de contrôle du bateau)
- Le temps total de navigation aérienne du dispositif (temps sur zone compris)

**EXERCICE N° 5 (4 points) :**

**Arrimage avec le Skylab**

Après avoir démoli le port d'amarrage axial lors de sa première tentative, Mario Jones, ex-champion de courses automobiles de stock-cars devenu astronaute, tente une nouvelle fois de s'arrimer à la station Skylab II par le port latéral, à la vitesse relative  $v = 10 \text{ m/s}$  (porté par la direction et le sens de l'axe  $b_2$ )



Sachant que l'énergie cinétique ne se conserve pas lors du choc (dit « inélastique »), le collier d'amarrage en absorbant notamment une partie, calculer :

- (a) la vitesse du centre de masse dans le référentiel local ;
- (b) le moment cinétique par rapport au centre de masse.

L'arrimage est un succès (les deux morceaux du naufrage restent solidaires)...mais, au moment du contact, les systèmes de maintien d'attitude tombent tous en panne.

Calculer :

- (c) la matrice d'inertie de la configuration arrimée ;
- (d) la vitesse de rotation angulaire de l'ensemble.

La masse du vaisseau Apollo est  $m_A = 15\,000 \text{ kg}$  et celle de la station Skylab II est  $m_{sl} = 50\,000 \text{ kg}$ . Leurs matrices d'inerties respectives dans leurs repères locaux ayant pour origine leur centre de masse respectif (et conformément à la base  $b_1, b_2, b_3$ ) valent :

$$I_A = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} \cdot 10^3 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{SL} = \begin{vmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} \cdot 10^3 \text{ kg.m}^2$$

EXERCICE N° 6 (6 points):

The Last (real) Starfighter



Le Lockheed F-104 Starfighter, conçu comme un pur intercepteur au milieu des années 1950, a été produit à plus de 2500 exemplaires. L'armée de l'air italienne l'a utilisé jusqu'en 2004. Léger et à l'aise à grande vitesse, il souffrait de qualités de vol assez médiocres à basse vitesse, régime dans lequel il tua le plus de pilotes, lui donnant le sobriquet peu enviable de « faiseur de veuves »...

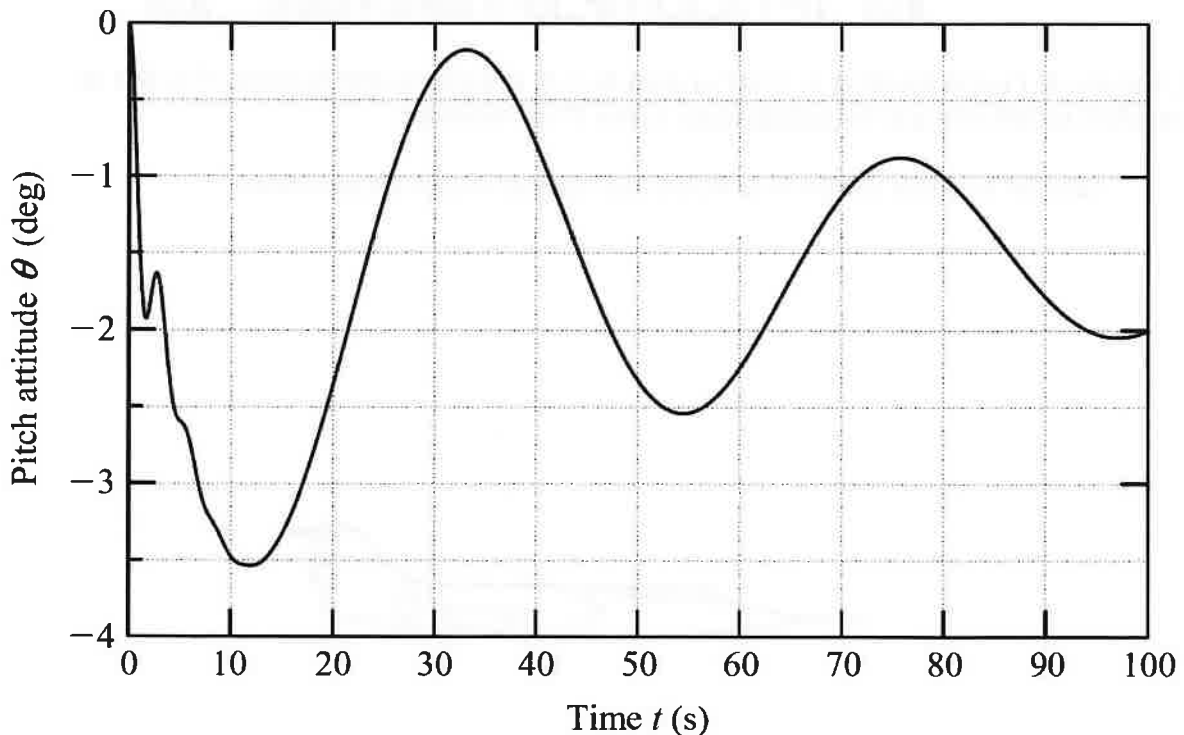
a) Avion naturel

On peut déterminer à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées la fonction de transfert longitudinale d'un aéronef en assiette  $\theta$  pour un déplacement de la profondeur  $\eta$ . Elle s'écrit de manière générale comme suit ( $s$  est la variable de Laplace) :

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = \frac{K_{\theta}(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)}$$

Considérons le F-104 volant en palier stabilisé au niveau de la mer et à près de 180 nœuds (93 m/s), en configuration lisse (typique d'une excursion à basse vitesse suite à une dégradation de l'énergie en manœuvre).

La réponse temporelle de cet avion, non asservi, à un échelon de  $1^\circ$  de la gouverne de profondeur se traduit par la réponse suivante en assiette (extrait sur 100s seulement) :



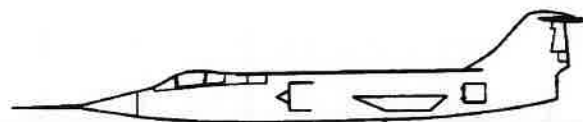
- Estimer la valeur  $\omega_p$  de la pulsation du « mode » le plus lent présent dans la réponse (mode dit de *Phugoïde* ou *Phygoïde*).
- Au vu de la durée de convergence de la réponse, on estime que l'amortissement total de ce mode est  $\sim 0.033$  rad/s - inversement proportionnel au temps de stabilisation -.  
Calculer la valeur du taux d'amortissement (ou amortissement « réduit ») du mode  $\zeta_p$   
- indicatif du nombre « d'*overshoot* » par rapport à la valeur finale si le système est amorti et convergent -.
- Justifier et quantifier au regard de cette valeur de  $\zeta_p$  « l'erreur » (en %) commise pour estimer  $\omega_p$  d'après le tracé de la réponse temporelle.

L'autre mode superposé est dit « mode d'oscillation d'incidence » ou de « période courte » (s pour *short*), et ne peut être aisément visualisé sur la réponse temporelle ci-dessus.  
Après un travail plus poussé d'identification en vol, le gain  $K_\theta$ , les constantes de temps  $T_{\theta_1}$  et  $T_{\theta_2}$  et les caractéristiques du mode d'incidence sont données et telles que :

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = \frac{-4.664(s + 0.135)(s + 0.267)}{(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 0.893s + 4.884)} = \frac{N_\theta(s)}{\Delta(s)}$$

L'assiette de l'avion équilibré (« trimé ») étant de  $2.3^\circ$  et notre modèle linéarisé (fonction de transfert) ne reflétant que les perturbations autour d'une moyenne,

- calculer la valeur stabilisée de  $\theta$  pour cet échelon unitaire de profondeur

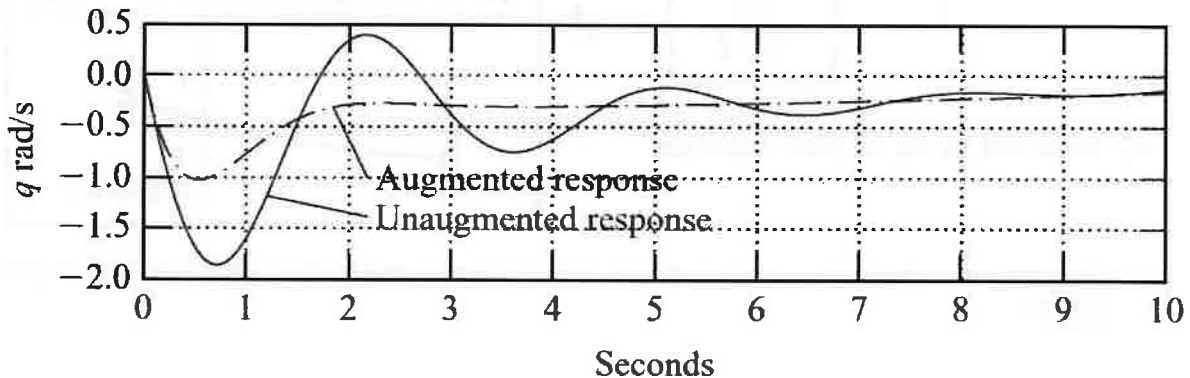


b) Avion asservi

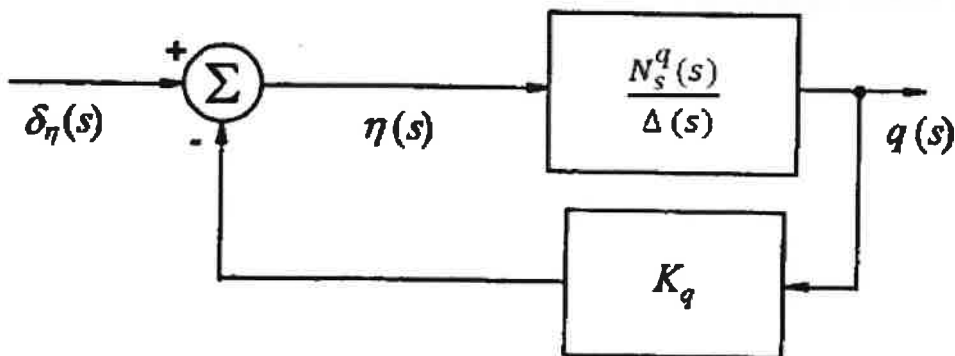
En conditions de décollage (trains sortis avec le plein de carburant - y compris avec le montage des réservoirs d'extrémités de voilure -, volets et becs de voilure déployés à 15°), la fonction de transfert en assiette de l'avion naturel devient :

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = \frac{-4.66(s + 0.133)(s + 0.269)}{(s^2 + 0.015s + 0.021)(s^2 + 0.911s + 4.884)} = \frac{N_s^\theta(s)}{\Delta(s)}$$

- Que peut-on dire de la phugoière par rapport à la configuration précédente du Starfighter ? (Justifier par le calcul)
- Que peut-on également dire du mode d'oscillation d'incidence ? (Justifier par le calcul)
- Quelle évolution, dans les caractéristiques de ces modes, vous semble la plus critique *a priori* pour le pilotage de la machine durant cette phase, sachant que le pilote agit directement sur la commande de profondeur sur cet avion en corrigeant des écarts de tenue d'assiette chaque seconde environ ?
- Sur lequel de ces deux modes longitudinaux proposeriez-vous d'agir à l'aide d'un système d'augmentation de stabilité (S.A.S.)?



Un asservissement direct sur l'assiette  $\theta$  du F-104 ne permettant pas d'atteindre le but escompté (on détériore davantage les caractéristiques du mode critique), on s'oriente vers un S.A.S. par lequel la rétroaction (*Feedback*) amplifiée par un simple gain proportionnel  $K_q$  (et non  $K_\theta$ ) la mesure de la vitesse de tangage de l'avion avant de la sommer avec la demande (consigne) comme présenté ci-dessous :



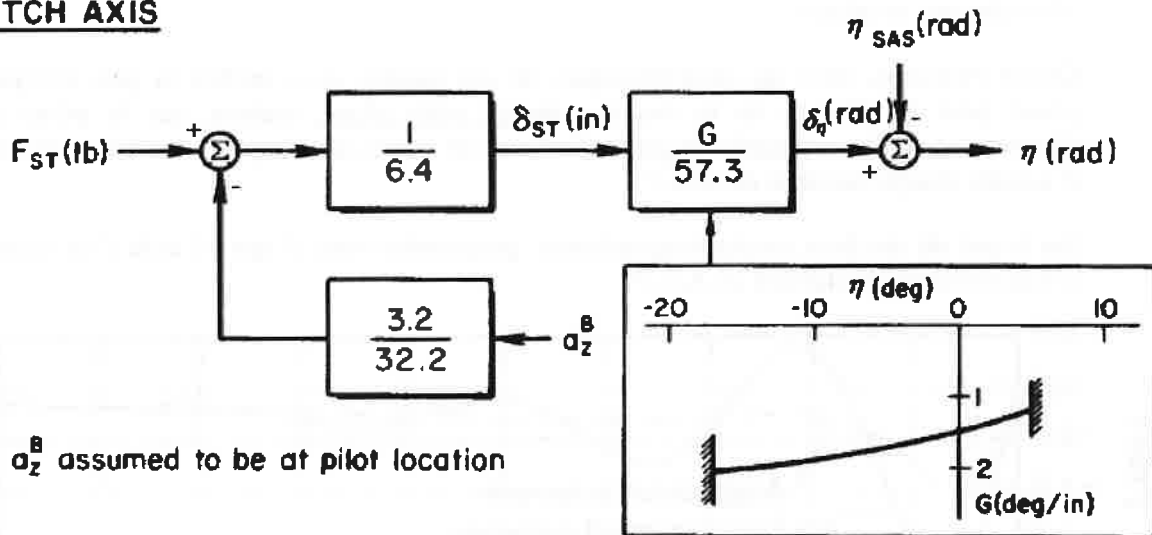
- En déduire l'expression littérale de l'avion asservi  $\frac{q(s)}{\delta_\eta(s)}$  en fonction de  $N_s^\theta(s)$ ,  $\Delta(s)$  et  $K_q$

c) Commande de profondeur

En amont de cette asservissement, on trouve le manche (« STick »), dont le déplacement sur la chaîne de profondeur est directement proportionnel à l'effort appliqué par le pilote, selon un rapport de proportionnalité constant quelles que soient les conditions de vol. Un amplificateur de déplacement (système hydraulique – la commande est supposée irréversible) vient alors transformer ce déplacement de manche en consigne de déplacement de gouverne...

Pour éviter une trop grande sollicitation à des vitesses élevées où un faible effort/déplacement commanderait une ressource (ou un piqué) trop prononcés (et donc potentiellement un dépassement de limite structurale et/ou d'incidence entraînant une perte de contrôle), une rétroaction sur l'accélération ressentie en cabine limite l'effort sous facteur de charge.

**PITCH AXIS**



$a_z^B$  assumed to be at pilot location

- Quel moyen technologique simple proposeriez-vous pour matérialiser physiquement le gain  $\frac{1}{6.4}$  ?
- Même question pour le gain  $\frac{3.2}{32.2}$  (un même organe passif doit assurer la mesure de l'accélération ET la limitation de l'effort ;  $9.81 m/s^2 = 32.2 ft/s^2$ ).
- Quelle(s) difficulté(s) verriez-vous pour établir la fonction de transfert longitudinale « de bout en bout »  $q(s)/F_{ST}(s)$  ?

## À REMPLIR PAR LE CANDIDAT

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :		
Employeur :			Unité :	
Spécialité essais présentée* : Hélicoptères)	PEXA	PEXH	INE (option Avions)	INE (option
(* Rayer les mentions inutiles)				

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION****AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

---

**SESSION DU 12 NOVEMBRE 2018**

---

**PILOTES D'ESSAIS EXPÉRIMENTAUX****INGÉNIEURS NAVIGANTS D'ESSAIS**

---

***ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE***

**Durée** : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée

Validé par :

NOM :
Date :
Signature :

NOTE :	/ 20
--------	------

EXERCICE N° 1 (2 points)

1. Déterminer l'unité, dans le SI, de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  sachant que cette constante apparait dans l'équation suivante (loi de Coulomb) :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

où  $F$  est une force,  $q$  est une charge électrique qui s'exprime en Coulomb ( $1 \text{ C} = 1 \text{ A}\cdot\text{s}$ ) et  $r$  une longueur.

2. On rappelle en outre la relation qui lie la tension  $u$  [V] et la charge électrique  $q$  [C] aux bornes d'un condensateur de capacité  $C$  [F] :  $q = Cu$ .

En déduire une expression différente de l'unité de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  utilisant le Farad [F].



**EXERCICE N° 2 (2 points)**

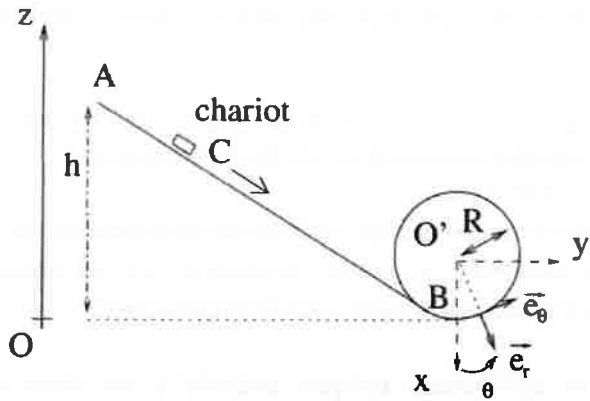


Figure 1: Schématisation du problème

On étudie numériquement la trajectoire d'un chariot de parc d'attraction, de masse  $m=10$  tonnes. Ce chariot part du point A, descend le long du plan incliné et entre ensuite dans un looping haut de  $R=40$  m, où l'on suppose qu'il peut parcourir plusieurs tours.

Les courbes de la Figure 2 représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique  $E_c$ , de l'énergie potentielle  $E_p$ , de l'énergie totale  $E_m$  et l'évolution de la réaction normale  $R_n$  du looping sur le chariot.

On prendra :  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

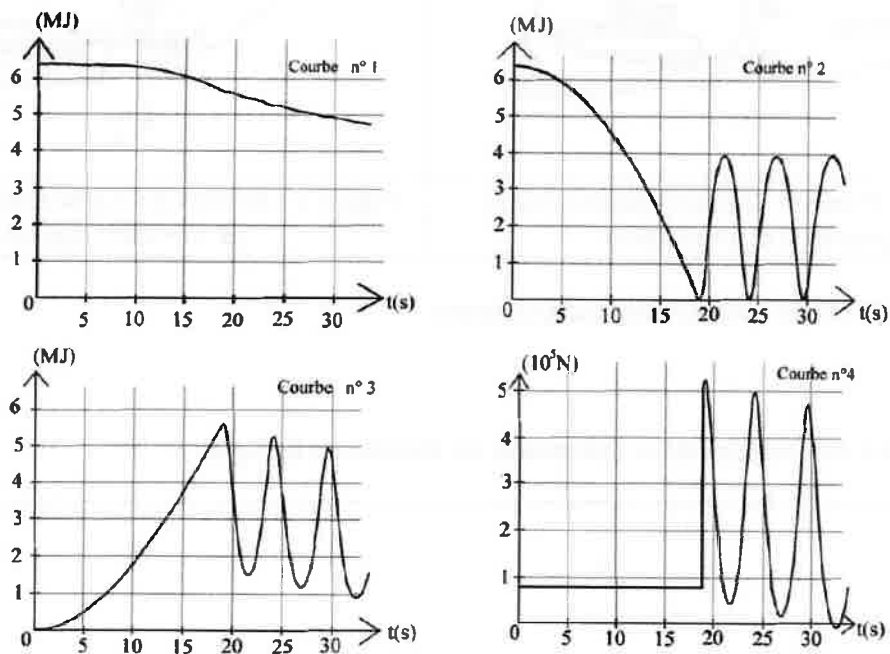


Figure 2: Résultats numériques

1. Associer à chaque courbe de la Figure 2 la grandeur représentée. La simulation prend-elle en compte des frottements et autres sources de dissipation ?
2. Calculer la hauteur initiale  $h$  et la vitesse initiale  $V_0$  du chariot, et la vitesse maximale  $V_{max}$  qu'il atteint.
3. À quelle date le chariot quitte-t-il le looping et combien de tours entiers a-t-il effectué avant de se décoller du looping ?

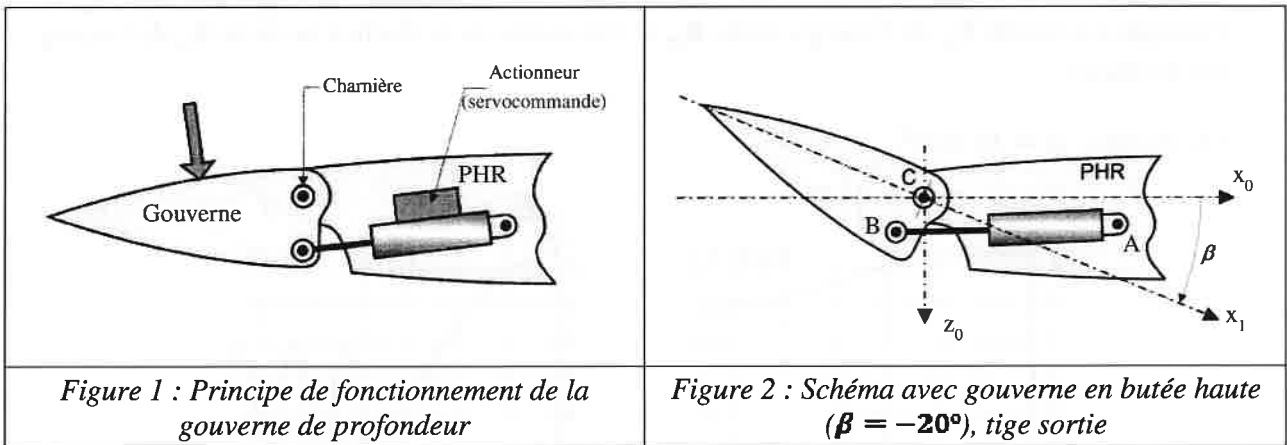
**EXERCICE N° 3** (7 points)

On s'intéresse à la gouverne de profondeur d'un avion de ligne moderne, située un niveau du bord de fuite du plan horizontal réglable (PHR).

Couramment sur les avions de ligne récents, le mouvement de rotation de la gouverne autour de l'axe de charnière est obtenu grâce à une unité de commande constituée de deux actionneurs :

- une servocommande reliée au circuit hydraulique de l'avion ;
- un EHA (Electro Hydraulic Actuator), utilisé en cas de défaillance sur la servocommande ou sur le circuit hydraulique. L'EHA est alimenté électriquement et produit localement, via un moteur électrique entraînant une pompe, l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement.

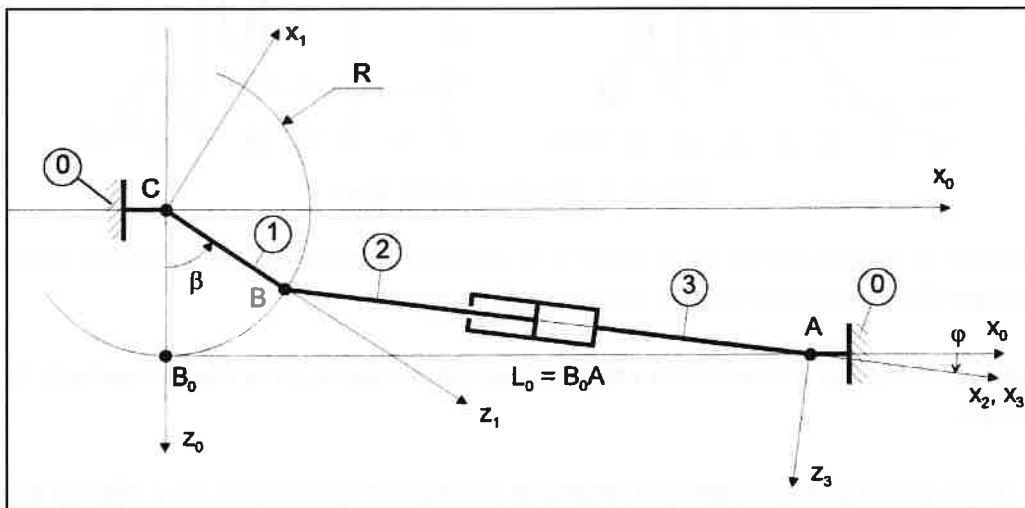
**Dans la suite de cet exercice, on supposera un actionneur unique, assimilé à un vérin de section  $S = 57.1 \text{ cm}^2$ .**



Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**PARTIE 1**

La modélisation cinématique de ce mécanisme est fournie sur la Figure 3.



*Figure 3 : Modélisation cinématique du fonctionnement de la gouverne de profondeur*

On introduit les notations suivantes :

- $R_0(A, x_0, y_0, z_0,)$  le repère lié au PHR ① ;
- $R_1(C, x_1, y_1, z_1,)$  le repère lié à la gouverne ② ;
- $R_2(B, x_2, y_2, z_2,)$  le repère lié à la tige du vérin ③ ;
- $R_3(A, x_3, y_3, z_3,)$  le repère lié au corps du vérin ④ ;
- $R = 155 \text{ mm}$  la longueur du bras de levier CB ;

En position neutre,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $L_0 = AB_0 = 700 \text{ mm}$  et les axes  $CB_0$  et  $AB_0$  sont perpendiculaires.

1. Calculer, pour une pression nominale de 338 bars, le module  $F_v$  de la force développée par le vérin.

2. Démontrer rigoureusement la relation suivante liant les deux angles  $\beta$  et  $\varphi$  :

$$\tan \varphi = \frac{R(\cos \beta - 1)}{L_0 - R \sin \beta}$$

3.

a. Déterminer l'expression du module  $M_v$  du moment autour de l'axe de charnière  $C\vec{y}$  généré par le vérin en fonction de  $F_v$ ,  $\beta$  et  $\varphi$ .

b. Faire l'application numérique pour  $\beta = 0^\circ$  puis  $\beta = -30^\circ$ .

4. On note  $L = AB$  la longueur entre les points d'attache A et B.

a. Déterminer l'expression de la course du vérin  $c = L - L_0$  en fonction de  $R$ ,  $L_0$  et  $\beta$ .

b. Faire l'application numérique pour les deux butées mécaniques angulaires de la gouverne, à savoir  $\beta = +20^\circ$  et  $\beta = -30^\circ$ .

c. La Figure 4 représente l'évolution de la course en fonction de  $\beta$ . Elle autorise une représentation linéaire de la forme  $\beta = K \cdot c$  avec  $\beta$  en radians et  $c$  en mètres. Déterminer graphiquement  $K$ .

d. En estimant les incertitudes de lecture graphique  $\sigma_c$  et  $\sigma_\beta$ , calculer l'incertitude  $\sigma_K$  sur la valeur de  $K$  trouvée à la question précédente.

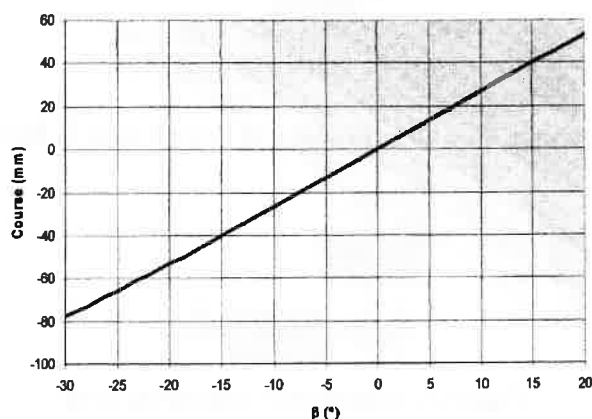


Figure 4 : Évolution de la course du vérin en fonction de  $\beta$

## PARTIE 2

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction de transfert du vérin.

On note :

- $Q(p)$  la transformée de Laplace de la variable  $Q(t)$ , le débit volumique entrant dans la chambre du vérin ;
- $P(p)$  la transformée de Laplace de la variable  $P(t)$ , le différentiel de pression entre les deux chambres du vérin ;
- $X_2(p)$  la transformée de Laplace de la variable  $x_2(t)$ , la position de la tige du vérin par rapport à la position neutre ;
- $F_e(p)$  la transformée de Laplace de la variable  $F_e(t)$ , la résultante des forces aérodynamiques appliquée au centre de poussée de la gouverne ;

L'équation du débit dans le vérin et le principe fondamental de la dynamique appliqué à la gouverne permettent de construire la représentation du système, sous forme de schéma bloc, donnée en Figure 1.

Y figurent :

- $B$  le module de compressibilité du fluide en  $N/m^2$  ;
- $V_0$  le volume de chaque chambre du vérin en position neutre en  $m^3$  ;
- $S$  la section utile du vérin en  $m^2$  ;
- $d$  la distance entre le centre de poussée de la gouverne et l'axe de charnière en  $m$  ;
- $R$  la distance BC en  $m$  ;
- $m_e$  la masse équivalente de la gouverne ramenée sur l'axe des vérins en  $kg$  ;
- $c$  le coefficient d'amortissement visqueux en  $N/(m/s)$  .

En outre, on note également  $r_h = \frac{2BS^2}{V_0}$  la raideur hydraulique du vérin.

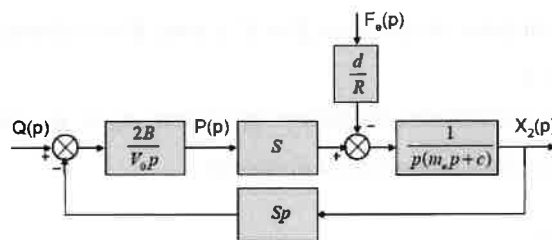


Figure 1 : Schéma bloc du vérin

On souhaite simplifier le schéma bloc de la Figure 1 et l'écrire sous la forme de la Figure 2.

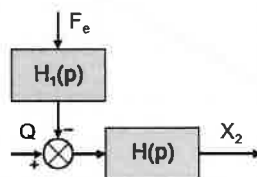


Figure 2 : Schéma bloc simplifié du vérin

- Déterminer la fonction de transfert  $H(p)$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K_0}{p \left( 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

En déduire les expressions de  $K_0$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  en fonction de  $r_h$ ,  $S$ ,  $m_s$  et  $c$ .

- Déterminer la fonction de transfert  $H_1(p)$  en fonction de  $d$ ,  $R$ ,  $S$ , et  $r_h$ .

On s'intéresse dorénavant à la boucle d'asservissement interne de la position  $x_2(t)$ . On note  $X_{2c}(p)$  la transformée de Laplace de la variable  $x_{2c}(t)$ , la consigne de position de la tige du vérin.  $K_p$ ,  $K_s$  et  $K_e$  sont des gains constants. Le schéma bloc à retour unitaire est donné en Figure 3.

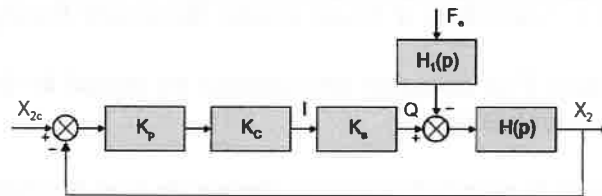


Figure 3 : Schéma bloc à retour unitaire

- Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  et en déduire l'expression de son gain statique  $K_{BO}$ .

On note  $X_2(p) = F(p) \cdot X_{2c}(p) + F_1(p) \cdot F_s(p)$ .

- Déterminer les fonctions de transfert  $F(p)$  et  $F_1(p)$ .
- Montrer que si  $F_s(t)$  est un échelon d'amplitude  $a$ , alors son influence sur la grandeur de sortie  $x_2(t)$  est nulle en régime permanent et qu'il est donc possible de la négliger.
- Déterminer l'écart vis-à-vis de l'entrée principale  $X_{2c}(p)$  :
  - pour une consigne  $x_{2c}(t)$  de type échelon unitaire ;
  - pour une consigne  $x_{2c}(t) = 0,1 \cdot t$  de type rampe.
- En déduire la valeur du gain de boucle ouverte  $K_{BO}$  permettant de satisfaire à l'exigence ci-après :
 

« Ecart de traînage pour une consigne  $x_{2c}(t) = 0,1 \cdot t$  :  $\epsilon_T \leq 2 \text{ mm}$  »

EXERCICE N° 4 (2 points)



Figure 1: Avion Banc d'Essais moteur Honeywell Boeing 757

L'avion banc d'essais moteur d'un motoriste aéronautique est équipé de deux moteurs, un par aile, de type A et d'un moteur central de type B.

On note  $p$  (respectivement  $q$ ) la probabilité pour un moteur de type A (respectivement B) de tomber en panne. Chaque moteur tombe en panne indépendamment les uns des autres.

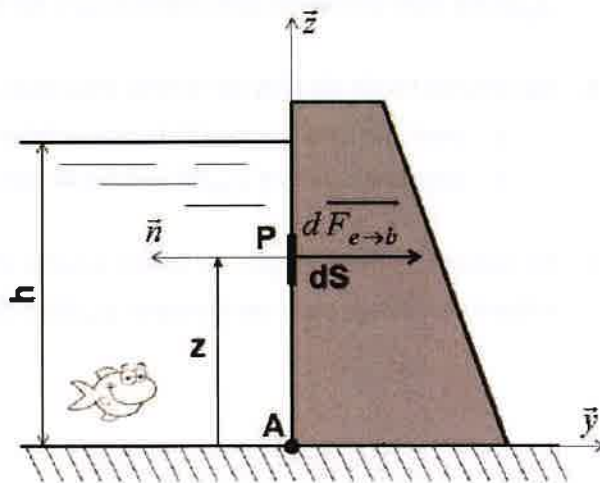
Le trimoteur peut voler si et seulement si au moins deux moteurs fonctionnent.

1. En détaillant votre calcul, exprimer la probabilité pour l'avion de voler ?
2. Faire l'application numérique avec  $p = 0.001$  et  $q = 0.1$ .

EXERCICE N° 5 (4 points)



Barrage du Revest les Eaux (Var)



On note  $h$  la hauteur de la retenue d'eau située en amont du barrage et  $L$  la largeur de celui-ci (supposée constante).

On s'intéresse au point  $P$  situé à la hauteur  $z$  et on pose  $dS$  l'élément de surface du barrage autour ce point.

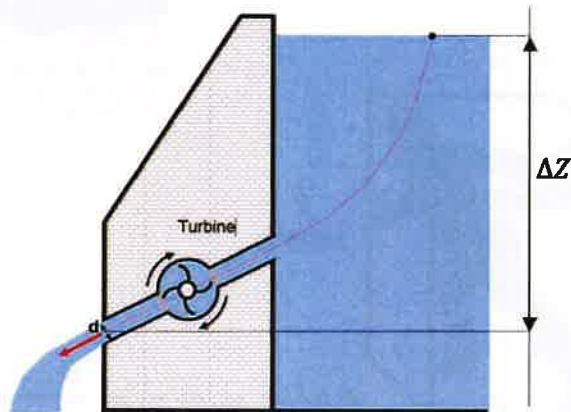
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

## PARTIE 1

1.
  - a. En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique, donner l'expression de  $p(z)$  la pression au point  $P$ .  
On notera  $\rho_e$  la masse volumique de l'eau,  $g$  de l'accélération de pesanteur terrestre, et  $p_a$  la pression atmosphérique au niveau de la surface.
  - b. Dans la suite de l'exercice, on négligera la contribution liée à la pression atmosphérique au niveau de la surface. Justifier quantitativement cette hypothèse en considérant  $h = 100 \text{ m}$ .
2. Écrire l'expression de la force élémentaire  $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}}$  de l'eau sur le barrage au point  $P$ .
3. En déduire l'expression et la valeur numérique du torseur d'action mécanique qu'exerce l'eau sur le barrage écrit au point  $A$ , soit :  $\{T_{e \rightarrow b}\}_A = \{F_{e \rightarrow b} ; \mathcal{M}_{A \rightarrow e \rightarrow b}\}$ .
4. Déterminer la hauteur du point  $B$ , notée  $h_B$ , de sorte que le torseur d'action mécanique exprimé en ce point soit un glisseur (moment égal à zéro).

## PARTIE 2

Le barrage est désormais équipé d'une turbine dont les aubes sont entraînées par un jet d'eau sous pression. La conduite de sortie de diamètre  $d = 2.5 \text{ m}$  est située à une profondeur  $\Delta Z = 50 \text{ m}$ . Le débit volumique en sortie est réglé à  $q_v = 25 \text{ m}^3/\text{s}$ . La retenue d'eau étant suffisamment grande, le niveau d'eau en amont du barrage est supposé constant. Les pertes de charges sont évaluées à  $Q_{pc} = 30 \text{ J/kg}$ . La turbine a un rendement global  $\eta = 60\%$ .



1. Donner l'expression et la valeur numérique de la vitesse de l'écoulement d'eau à la sortie de la canalisation.
2. Déterminer l'expression de la puissance  $P_d$  disponible sur l'arbre de la turbine. Faire l'application numérique en exprimant votre résultat en MW.

EXERCICE N° 6 (3 points)



Figure 1: Pilote pressé de voler ou qui ne veut pas être mouillé ?

Dans cet exercice, on se propose de répondre à l'éternelle question : sous la pluie, est-il préférable de marcher ou de courir pour se mouiller le moins possible ?

Pour ce faire, notre pilote est assimilé à un parallélépipède rectangle de dimensions  $h$ ,  $l$ , et  $L$  et se déplace à vitesse constante  $\vec{v}$  par rapport au sol.

La pluie tombe à la vitesse  $\vec{u}$  dans le plan  $(Oxy)$ . Le nombre de gouttes de pluies par unité de volume est noté  $n$ . Ces deux grandeurs sont supposées constantes.

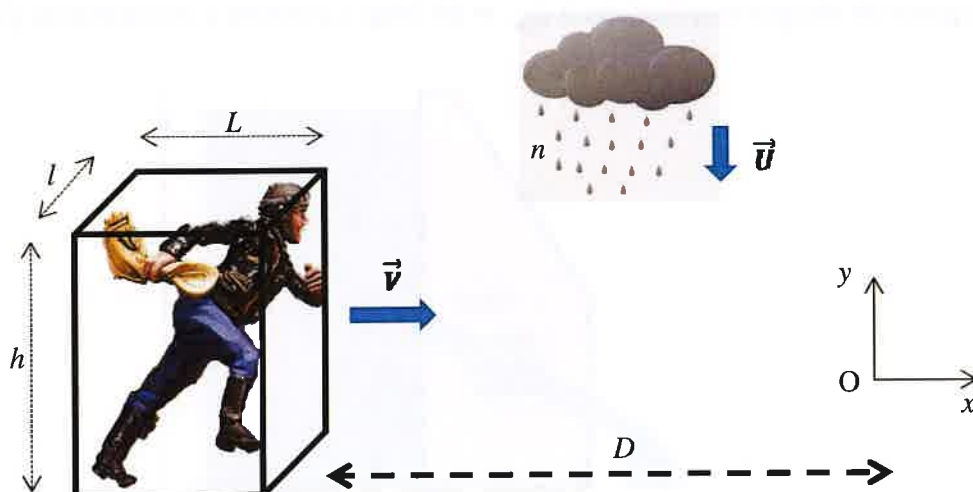


Figure 2: Modélisation du problème

Répondre à la question posée en préambule. Pour cela, détailler votre raisonnement et exprimer la quantité  $N$  de gouttes accumulées sur le trajet, en différenciant les cas suivant :

1. vent nul (pluie verticale) ;
2. vent de face ;
3. vent dans le dos.



# Sessions Complémentaires :

Avril 2019

Et

Juillet 2019

**À REMPLIR PAR LE CANDIDAT**

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :
Employeur :		Unité :
Spécialité essais présentée* : PEXA - INE		
(* Rayer les mentions inutiles)		

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION****AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

---

**SESSION DU 29 AVRIL 2019**

---

**PILOTES D'ESSAIS EXPÉRIMENTAUX****INGÉNIEURS NAVIGANTS D'ESSAIS**

---

***ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE***

Durée : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée

Validé par :

NOM :
Date :
Signature :

NOTE :	/ 20
--------	------

EXERCICE N° 1 (2 points)

Analyse dimensionnelle

Le nombre de Froude (sans dimension, comme tous les paramètres de similitude) est défini en mécanique des fluides par :

$$Fr_i = v^{A_i} \cdot m^{B_i} \cdot g_0^{C_i} \cdot L_C^{D_i}$$

où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $m$  la masse de l'élément de fluide,  $g_0$  l'accélération dans le champ de pesanteur terrestre et  $L_C$  le rapport entre la section de l'écoulement d'un canal et sa largeur.

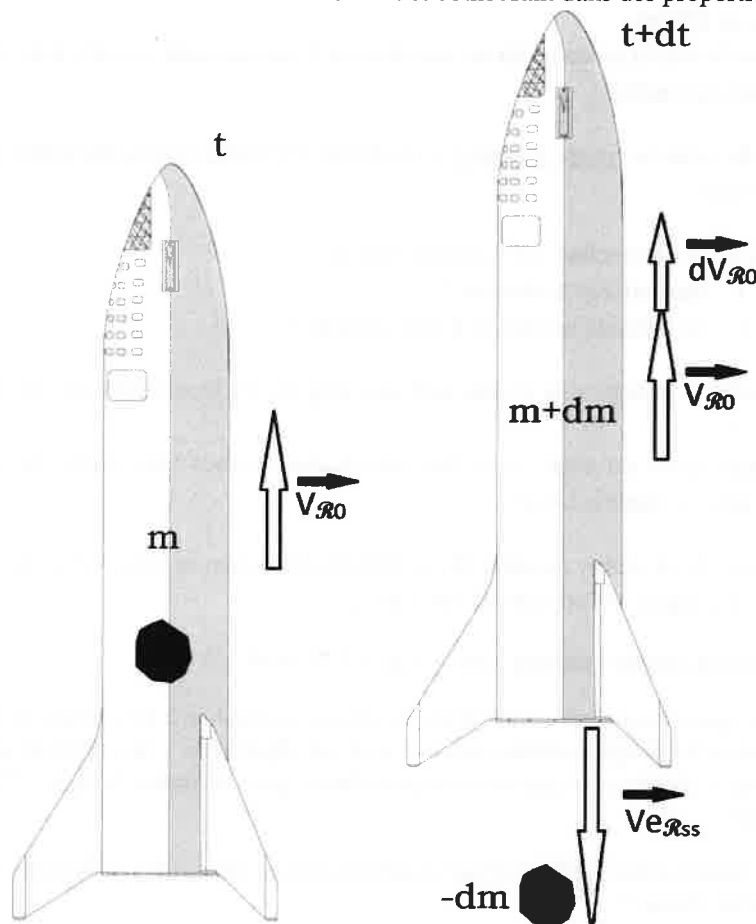
- 1) Sachant qu'il caractérise dans un fluide l'importance relative de son énergie cinétique par rapport à son énergie potentielle (gravitationnelle), proposez une solution [ $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ] pour l'expression de ce nombre  $Fr_i$ .
- 2) Une deuxième expression  $Fr_j$  peut s'écrire comme le rapport entre la vitesse moyenne de l'écoulement et celle de la propagation des ondes en surface et à faible profondeur.  
En déduire une deuxième solution [ $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ ] pour l'expression du nombre de Froude et donnez l'expression de la vitesse de propagation des ondes.

EXERCICE N° 2 (5 points)

« Suicide Burn »

La question 1 est indépendante des deux suivantes.

Il est très difficile de faire varier la poussée d'un moteur-fusée sur une grande plage de fonctionnement et encore plus de manière réactive. De plus, dans le cas d'un rétro-freinage pour se poser, passer trop de temps en l'air à poussée réduite est consommateur de carburant et comburant dans des proportions déraisonnables.



- 1) En considérant le *Starship* et son combustible comme un système de particules et en appliquant la première loi de Newton à ce système (on négligera les termes du second ordre et la traînée aérodynamique dans le bilan des forces), montrez que les équations du mouvement s'écrivent :

$$m \cdot dV_{\mathcal{R}0}/dt = -m \cdot g - |V_{e_{\mathcal{R}ss}}| \cdot dm/dt \quad \text{et} \quad dH_{\mathcal{R}0}/dt = V_{\mathcal{R}0}$$

où

- $m$  est la masse du *Starship* en fonction du temps ( $m = m(t)$ )
  - $dm/dt$  ( $<0$ ) est le débit massique (carburant et comburant éjectés par le moteur *Raptor*)
  - $V_{\mathcal{R}0}$  est la vitesse du *Starship* dans le repère local (terrestre), considéré comme galiléen
  - $|V_{e_{\mathcal{R}ss}}|$  est la vitesse d'éjection des gaz (de  $-dm$  dans le repère constitué par le *StarShip*).
- 2) Vous êtes en charge de tester le *Starship* dans l'environnement terrestre, avant d'envisager de se poser sur Mars. En approche finale (considérée comme verticale), le véhicule tombe en marche arrière à la vitesse terminale (~constante)  $V_{i_{\mathcal{R}0}} = -305$  m/s et doit allumer son seul moteur central *Raptor* au bon moment pour pouvoir se poser avec une vitesse verticale.
- $V_{\text{cible } \mathcal{R}0} = -1$  m/s (Il est primordial de rester sous la barre des 5 m/s pour l'intégrité de la structure et de l'équipage).

Le *Starship* fait 85 tonnes à vide (la charge utile sera négligeable pour ce vol d'essai) mais il lui reste pour l'approche finale à peine un peu plus de 1,5% de sa masse maximale au décollage (1335 tonnes) en carburant (4633 kg de méthane liquide) et comburant (16217 kg d'oxygène liquide).

Le *Raptor* a une poussée nominale  $F_{\text{nom}}$  de 1900 kN et éjecte dans ces conditions 113 kg/s de  $\text{LCH}_4$  et 397 kg/s de LOX à la vitesse  $|V_{e_{\mathcal{R}ss}}|$  de 3237 m/s.

On considèrera  $g$  comme constant avec  $g = g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup> et les forces aérodynamiques comme négligeables.

- a. Intégrez l'équation du mouvement pour trouver l'expression du temps avant impact, c'est-à-dire la date (à la seconde près) à laquelle le moteur doit s'allumer pour se poser à la vitesse  $V_{\text{cible } \mathcal{R}0}$  prévue.  
Faites le calcul en considérant une réserve d'une seconde comme non utilisée (idem pour les calculs suivants).
  - b. Quelle serait la vitesse d'impact si on devait déclencher manuellement le *Raptor*... une seconde trop tard ?
  - c. Et si on le déclençait une seconde trop tôt :
    - i. sans utiliser la réserve ?
    - ii. en utilisant la réserve d'une seconde ?
  - d. Concluez : mieux vaut-il trop tard que trop tôt et, le cas échéant, en utilisant la réserve ou non ?
- 3) Quelque temps après cet essai, vous êtes sélectionné(e) pour faire partie du premier équipage qui embarquera pour la planète rouge.

Vous disposez de la même quantité de carburant/comburant et vous débarquez cette fois avec une charge utile (y compris l'équipage) de 45 tonnes.

On considèrera  $g$  comme constant avec  $g = g_0 = 3,71$  m/s<sup>2</sup>.

Du fait de la quasi-absence d'atmosphère, la vitesse verticale est désormais de 408 m/s au point clef pour déclencher la rétropropulsion (toujours avec un objectif de 1 m/s résiduel au toucher des patins), mais la vitesse d'éjection des gaz est aussi plus élevée pour le *Raptor*  $|V_{e_{\mathcal{R}ss}}| = 3728$  m/s, optimisé pour ces conditions.

Combien de temps avant l'heure prévue d'arrivée doit-on désormais déclencher l'allumage du moteur pour l'approche finale ?

EXERCICE N° 3 (3 points)

Airbag Deliverooo...

Note : les parties A et B peuvent être traitées séparément.

DGA-EV doit tester une nouvelle méthode d'aérolargage pour déposer des charges en zone de reliefs escarpés par parachute terminal + airbags. Les objectifs initiaux portent sur une masse totale  $m = 300$  kg. La séquence prévoit que, juste après l'extraction de la charge par la rampe arrière d'un A400M à haute altitude, les airbags se gonflent pour former une « bulle » de protection de rayon  $r = 1$  m autour de la charge de test autant qu'un aérofrein (l'action du parachute n'est pas prise en compte ici : il ne s'ouvre que très peu de temps avant l'impact pour limiter l'incertitude sur la zone de récupération du colis).

A) « *Jusqu'ici tout va bien* ».

- 1) Donnez l'expression de la force de traînée de la charge, (notamment) en fonction de son coefficient de traînée  $C_X \approx 0.7$ , défini par rapport à sa surface projetée  $S_{REF}$ .
- 2) Ecrire l'équation du mouvement du dispositif « gonflé » en fonction de la vitesse de chute  $V_Z$ .  
On pourra poser  $V_1 = \sqrt{(2g/\rho * C_B)}$  où  $\rho(Z_p)$  est la masse volumique de l'air à l'altitude-pression considérée et  $C_B = m/(C_X * S_{REF})$  le « coefficient balistique ».
- 3) En déduire l'évolution de  $V_Z$  au cours du temps (donnez l'expression et commentez).
- 4) Estimez la  $V_Z$  juste avant l'ouverture du parachute pour un largage en montagne si la zone de récupération se situe autour de 3000m. On donnera  $\rho/\rho_0 \approx (20 - Z_p) / (20 + Z_p)$  où  $Z_p$  est l'altitude-pression en km et  $\rho_0$  la masse volumique de l'air à l'altitude-pression « zéro » au niveau de la mer en atmosphère standard (15°C, 101325 Pa et  $\mathcal{R} = C_P - C_V = 287$  J/kg/K).

B) « *Posé, pas cassé* ».

Le parachute a non seulement pour rôle de réduire davantage  $V_Z$ , mais aussi de stabiliser l'ensemble avant (pour éviter une déchirure des airbags) et après l'impact (pour éviter que l'ensemble ne roule davantage). La séquence prévoit qu'après l'impact initial, les airbags se dégonflent partiellement pour éviter un deuxième rebond et qu'alors le harnais du parachute se détache une fois l'ensemble stabilisé en rotation.

- 1) Considérant la masse inchangée, malgré la perte du parachute, écrivez la nouvelle équation du mouvement en translation horizontale sachant que la friction sur le sol s'écrit  $F = -\beta V_X^n$  où :
  - $V_X$  est la vitesse horizontale,
  - $\beta$  est un coefficient de frottement fonction de la masse et des dimensions de l'ensemble,
  - $1 < n < 2$  dépend de la nature du contact (assimilé à une sorte de frottement fluide en raison de la présence de petits corps intermédiaires à l'interface : graviers, sable, etc.).
- 2) En déduire l'évolution de  $V_X$  au cours du temps sachant qu'au deuxième contact, en début de glissement, elle vaut  $V_{X0} = 2$  m/s,  $n = 1/2$  et  $\beta = 300$  S.I.

EXERCICE N° 4 (7 points)

« *Zero Dark Thirty* »

C, D et E sont indépendantes entre elles et de A et B.



Des équations de la mécanique du vol, on peut déduire les fonctions de transfert longitudinales suivantes pour l'hélicoptère UH-60 *Black Hawk* en vol stationnaire ou très lent hors effet de sol (dans la variable de Laplace  $s$ ).

- Mouvement vertical (hauteur en pieds par rapport au point d'équilibre initial)

$$\frac{z}{\theta_c} = \frac{5.95}{s(s - 0.346)}$$

pour une entrée positive de collectif  $\theta_c$  en degrés.

- Mouvement horizontal ( $\dot{x}$  vitesse en ft/s)

$$\frac{\dot{x}}{\text{Blc}} = \frac{27,4s^2 + 84,94s + 1525}{s^3 + 3,16s^2 + 0,186s + 1,324} = \frac{N_x(s)}{\Delta(s)}$$

- Mouvement de tangage ( $\theta$  en degrés)

$$\frac{\theta}{\text{Blc}} = \frac{-47,24s - 1,711}{s^3 + 3,16s^2 + 0,186s + 1,324} = \frac{N_\theta(s)}{\Delta(s)}$$

pour une entrée de commande cyclique positive Blc en degrés.

A) Sachant que  $s^3 + 3,16s^2 + 0,186s + 1,324$

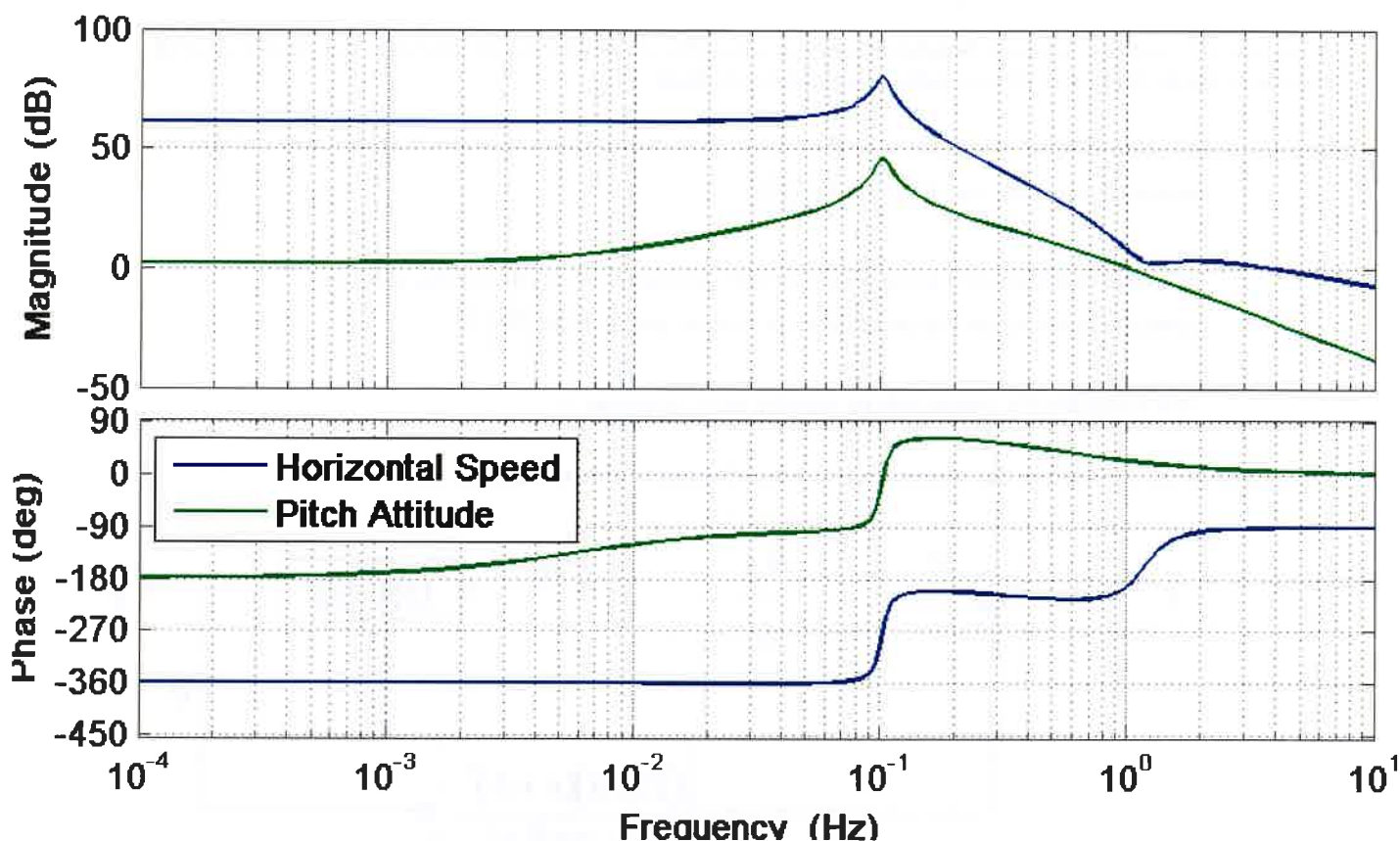
peut être éventuellement factorisé sous la forme :

$$(s + 3,2293)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

- Déterminez si la machine telle que présentée est stable ou instable selon les trois axes et, le cas échéant, le caractère oscillatoire ou non de cette/ces divergences.
- Précisez, le cas échéant, pour la partie oscillatoire, ses pulsations non amortie, amortie et leurs fréquences correspondantes, ainsi que les amortissements réduit et total.

- B) Représentez toutes ces racines dans le plan complexe (échelles libres selon les deux axes, précisez les valeurs des parties réelles et imaginaires le cas échéant).

C) La réponse en fréquence (diagrammes de Bode) est donnée ci-dessous pour les fonctions de transfert en vitesse longitudinales  $\dot{x}$  et d'attitude en tangage  $\theta$ :



- 1) Dessinez et donnez les marges de gain et de phase (éventuellement négatives) pour les deux axes (translation horizontale et tangage). Appuyez-vous sur/justifiez par rapport aux fonctions de transfert si nécessaire.
- 2) Au moins un de ces deux axes est-il susceptible d'instabilité à basse fréquence ? Si oui, le(s)quel(s) ?
- 3) Au moins un de ces deux axes est-il susceptible d'autre(s) instabilité(s) ? Si oui, pour quelle(s) fréquence(s) d'excitation ?



D) Pour la version « furtive » du MH-60 destinée aux opérations spéciales (« *Ghost Hawk* »), le constructeur a remplacé les commandes classiques issues de l'UH-60 par un système de commandes électriques informatisées (« *fly by wire* ») pour réduire la charge de travail de l'équipage de conduite. Elle comporte (notamment) en longitudinal deux « logiques » (deux boucles agissant sur la même commande de pas cyclique Blc en sommation) :

- Une boucle pour aider l'équipage à court terme ;
- Une boucle à plus long terme.

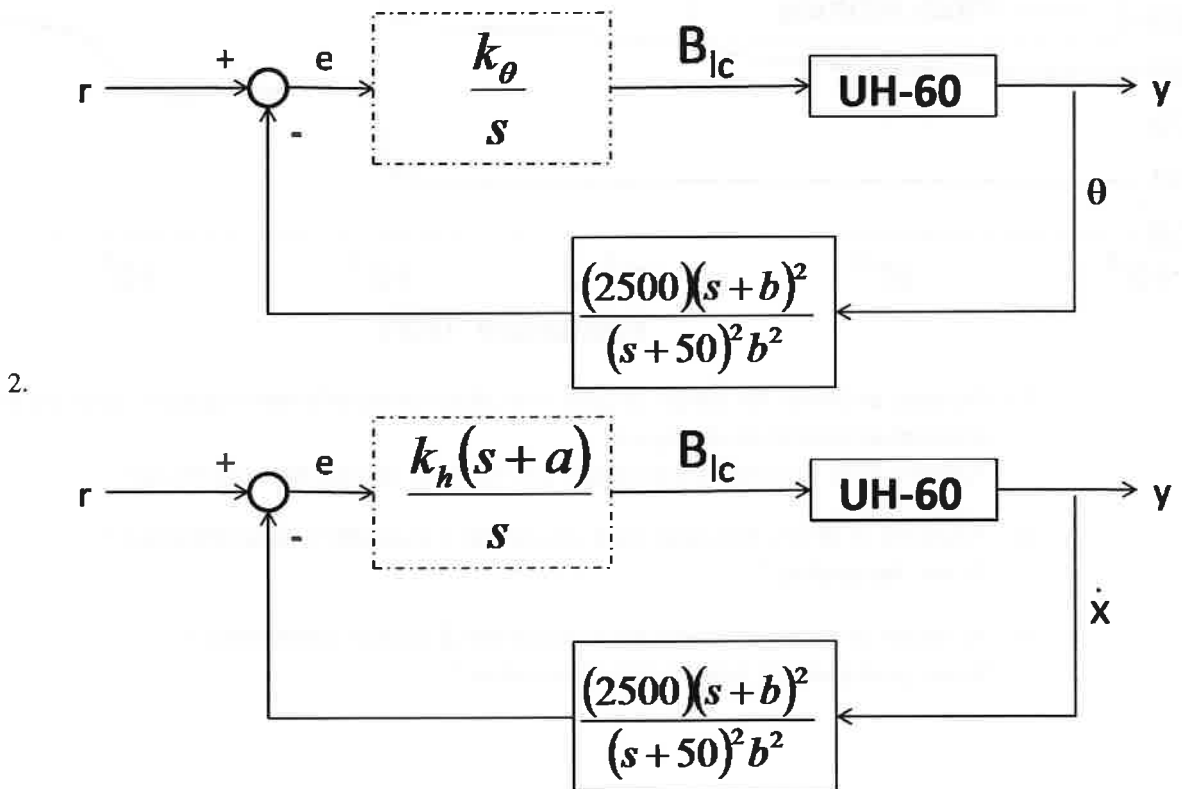
A laquelle de ces deux fonctions/boucles affecteriez-vous plus particulièrement la gestion des deux axes dont vous avez étudié la réponse fréquentielle (diagrammes de Bode) ?

E) Les deux boucles partagent un même type de capteurs  $C(s)$  d'assiette  $\theta$  et de vitesse  $\dot{x}$  dont la fonction de transfert est :  $C(s) = \frac{50^2(s+b)^2}{(s+50)^2 b^2}$ .

la boucle de retour en  $\theta$  passe par un simple intégrateur de coefficient  $k_\theta$  alors que la boucle de retour en vitesse horizontale  $\dot{x}$  passe par un filtre  $\frac{k_h(s+a)}{s}$ .

$r$  est assimilée à la commande au manche (ou « incepteur »).

$y$  est le « vecteur des sorties » de la « représentation d'états » du UH-60.



Pour simplifier le problème, on considère que la constante des capteurs  $b = 1,5$  est la même dans les deux boucles,  $a = 2,5$ ,  $k_\theta = -1$  et  $k_h = 0.0005$ .

- Représentez sur un même schéma-bloc le système complet (les deux boucles) ;
- Exprimez alors  $B_{lc}(s)$  en fonction de  $r(s)$ ,  $C(s)$ ,  $\theta(s)$ ,  $\dot{x}(s)$ ,  $k_\theta$  et  $k_h$  ;
- Exprimez enfin la fonction de transfert  $\frac{\theta(s)}{r(s)}$  en fonction des mêmes variables, ainsi que de  $\Delta(s)$ ,  $N_{\dot{x}}(s)$  et  $N_\theta(s)$  ;
- A quelle valeur d'assiette le « Ghost Hawk » se stabilise-t-il pour un échelon d'un degré de manche ?



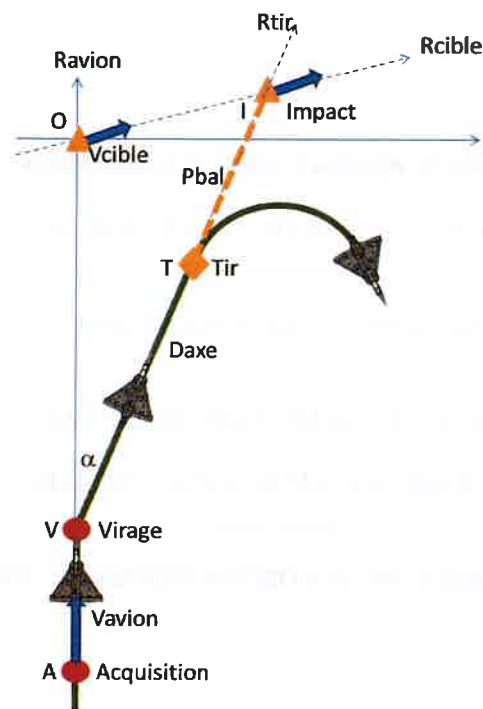
EXERCICE N° 5 (3 points)

Guidage des commandes de vol pour un tir sur cible mobile

Un chasseur vole en palier à vitesse sol  $V_{\text{avion}}$  constante dans une atmosphère standard constante ( $P_s, T_s$ ) sans vent. Il vole à une hauteur  $Z_{\text{avion}}$  et veut tirer sur une cible mobile au sol qui roule à une hauteur cible constante  $Z_{\text{cible}}$ , à une vitesse  $V_{\text{cible}}$  constante et sur une route droite  $R_{\text{cible}}$ .

Pour le couple  $\{V_{\text{avion}}, Z_{\text{avion}}, Z_{\text{cible}}\}$ , la portée balistique pure  $P_{\text{bal}}$  sans guidage est constante. Le temps de vol de la munition est  $T_{\text{dVbal}}$ .

Avec ses capteurs électromagnétiques et optroniques, l'avion fait une acquisition de la cible sur la route  $R_{\text{avion}}$  à une distance  $D_{\text{acq}}$ . Une fois cette acquisition faite, le système d'armes calcule en  $T_{\text{calcul}}$  une solution de tir pour guider l'avion sur une route de tir  $R_{\text{tir}}$  afin que la munition tirée sur cette route à la solution de tir tombe sur la cible mobile qui aura bougé pendant un temps  $\Delta t$ . L'avion prend instantanément le route de tir après ce temps  $T_{\text{calcul}}$  (hypothèse deux routes sans arrondi de rejointe).



Déterminer le système d'équation permettant de déterminer l'angle du virage  $\alpha$ , la distance de vol avant le tir  $D_{\text{axe}}$  (depuis le virage jusqu'au tir) et le temps  $\Delta t$  entre l'acquisition et l'impact. (2 points)

Résoudre littéralement ce système d'équation et exprimer  $D_{\text{axe}}$ ,  $\alpha$  et  $\Delta t$  en fonction des paramètres tactiques.

## À REMPLIR PAR LE CANDIDAT

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :
Employeur :		Unité :
Spécialité essais présentée* :	<del>PEXA</del> <del>PEXH</del> INE (option Avions)    INE (option Hélicoptères)	
(* Rayer les mentions inutiles)		

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION****AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

---

**SESSION DU 22 JUILLET 2019**

---

**PILOTES D'ESSAIS EXPÉRIMENTAUX****INGÉNIEURS NAVIGANTS D'ESSAIS**

---

**ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE**

Durée : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée.

Validé par :

NOM :
Date :

NOTE :	/ 20
--------	------

## EXERCICE N° 1 (2 points)

### UNE AFFAIRE DE SIMILITUDE...

L'étude des écoulements aérodynamiques est facilitée par l'utilisation de paramètres sans dimension, par exemple dans le cas d'études aux échelles réduites de dispositifs ou maquettes en vol (portées ou autonomes), ou en soufflerie.

Ainsi, les forces de viscosités l'emporteront sur les forces d'inertie du fluide s'écoulant autour d'un nano-drone (à l'opposé d'un gros porteur) ce que traduit le nombre de **Reynolds**  $Re$ , et qui nous renseigne sur une des caractéristiques fondamentales de l'écoulement : on parle de « régime » laminaire à faible  $Re$  ou turbulent à fort  $Re$ , « en transition » aux valeurs intermédiaires.

Si l'aéronef est transsonique ou supersonique, il faudra aussi prendre en compte le nombre de **Mach**  $M$ , qui nous renseigne sur la compressibilité du fluide.

Il est en pratique difficile voire impossible de réunir toutes les conditions de **similitude**. C'est tout l'intérêt d'essayer en vol des dispositifs ou véhicules en vraie grandeur et dans les conditions de vol prévues pour l'application ou l'utilisation envisagée.

Pire, lorsqu'il s'agit d'aller encore plus vite, ou de voler longtemps dans des conditions thermiques défavorables (très haute altitude ; écoulements de tuyères ou de gros groupes de conditionnement etc.), les problèmes de transferts thermiques par convection (quantité de mouvement) ou par radiation doivent également être pris en compte pour la tenue des aérostructures, chambres de combustion, protections thermiques, etc.

C'est ce qu'expriment d'autres paramètres de similitude tels que  $Nu$  et  $Pr$  et  $St$ .

A) Montrez que le nombre de Stanton  $St = h^*/(\rho V C_p)$  est bien sans dimension sachant que :

- $Re = \rho V L / \mu$  est le nombre de Reynolds (ratio des forces inertielles/forces de viscosité)
- $Nu = h^* \cdot L / K$  est le nombre de **Nusselt** (ratio de convection/conduction thermique)
- $Pr = \mu \cdot C_p / K$  est le nombre de **Prandtl** (ratio des diffusivités de quantité de mouvement/thermique)
- $K$  est la conductivité thermique en  $J/(m \cdot s \cdot K)$  du fluide
- $h^*$  est le coefficient de transfert thermique (surfaccique) en  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
- $\rho$  est la masse volumique du fluide
- $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide (en  $Pa \cdot s$ )
- $L$  est une longueur caractéristique dans l'écoulement (ex : corde d'une aile)
- $V$  est la vitesse du fluide par rapport au corps étudié
- $C_p$  est la capacité thermique/calorifique (ou « chaleur massique ») du fluide à pression constante

3.

B) Montrez que l'on peut exprimer directement le Nombre de Stanton connaissant les trois autres : trouver et écrire  $St = f(Nu, Re, Pr)$ .

## EXERCICE N° 2 (4 points)

### DÉCOLLAGE DE LA FUSÉE ARIANE 5

La propulsion de la fusée Ariane 5 est assurée par :

- un étage principal cryotechnique (EPC) constitué du moteur Vulcain, de puissance transmise à la fusée de l'ordre de 10 MW en moyenne au cours des deux premières secondes du décollage ;
- deux boosters (étages d'accélération à poudre EAP) qui contribuent à environ 90 % de la puissance totale transmise à la fusée au début du décollage.

Le but de cet exercice est de vérifier certaines des caractéristiques de la fusée Ariane 5 à partir d'une chronophotographie de son décollage.

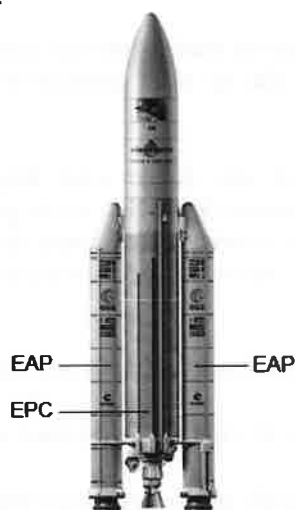


Figure 1. Représentation d'un modèle de la fusée Ariane 5

#### Données :

- intensité de la pesanteur :  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ;
- débit massique d'éjection de gaz du moteur Vulcain :  $270 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  ;
- débit massique d'éjection de gaz de chaque booster :  $1,8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  ;
- caractéristiques des différentes fusées Ariane :

Fusée	Ariane 1	Ariane 2	Ariane 3	Ariane 4	Ariane 5
Masse au décollage (en tonnes)	210	219	234	243 à 480	750 à 780
Poussée (en kN)	2500	2700	2700	2700 à 5400	12000 à 13000
Hauteur de la fusée (en m)	47	49	49	59	52

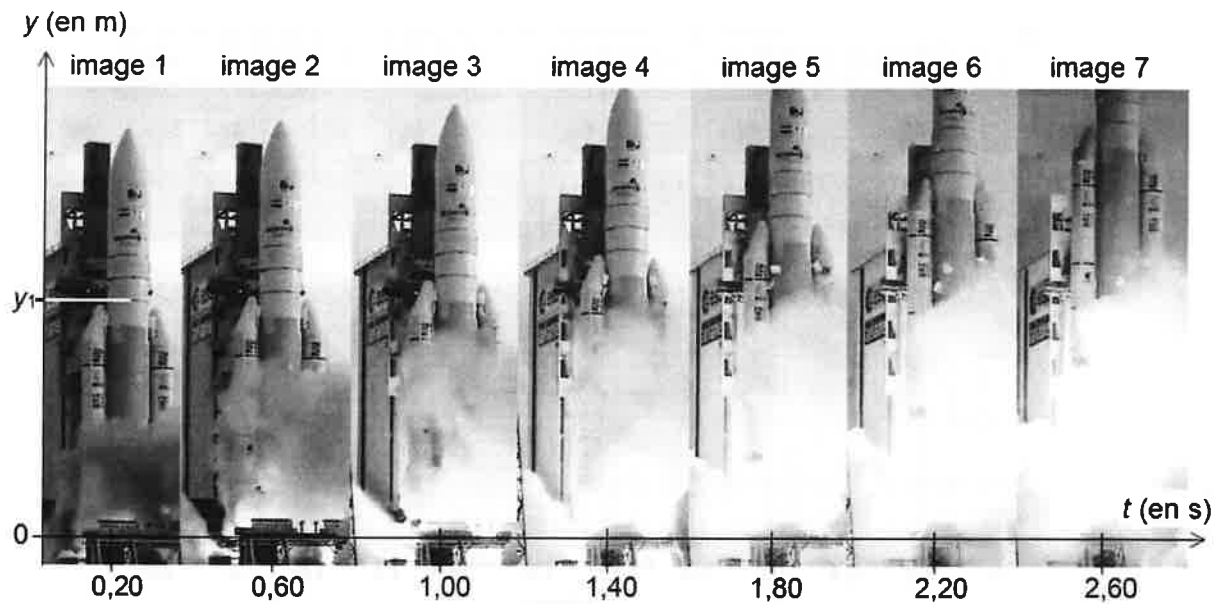


Figure 2. Chronophotographie du début du décollage d'Ariane 5

Pour faciliter les mesures, les différentes images de la fusée ont été décalées horizontalement les unes par rapport aux autres.

L'étude de cette chronophotographie donne les résultats suivants. L'axe vertical a pour origine la base de la fusée.

Image	t (s)	y (m)	vy (m·s <sup>-1</sup> )
1	0,20	y <sub>1</sub> = 30,1	
2	0,60	31,5	v <sub>2</sub>
3	1,00	33,3	6,8
4	1,40	36,9	9,6
5	1,80	y <sub>5</sub>	12
6	2,20	46,5	15
7	2,60	52,9	

Figure 3. Détermination expérimentale de la position et de la vitesse de la fusée

L'image 1 de la figure 2 précise l'endroit de la fusée qui sert à repérer son mouvement vertical. Son ordonnée sur l'axe des y est notée y<sub>1</sub>.

### 1. Estimation de la poussée

1.1. Calculer la masse des gaz éjectés pendant la durée de l'étude, soit 2,40 s. La comparer à la masse au décollage de la fusée. Commenter.

On considère dans la suite de l'exercice que la masse totale de la fusée est constante pendant la durée de l'étude.

1.2. Estimer la valeur de y<sub>5</sub>. Détailler la démarche.

1.3. On donne en figure 4 le graphe représentant l'évolution de la vitesse de la fusée au cours du temps.

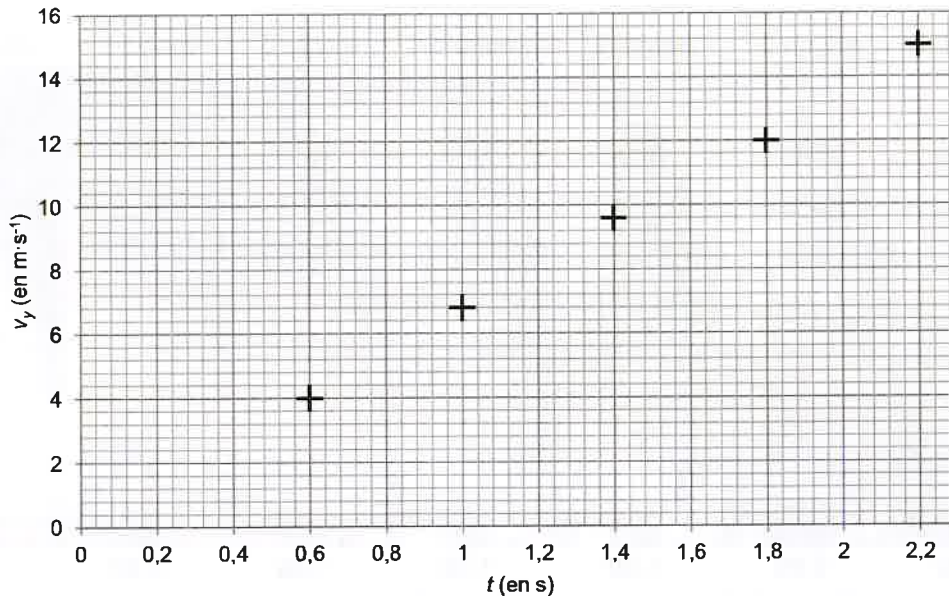


Figure 4. Évolution de la valeur de la vitesse de la fusée au cours du temps

1.3.1. Estimer la valeur de  $v_2$ . Détailler la démarche et vérifier que ce résultat est cohérent avec le graphe de la figure 4.

1.3.2. Montrer que la valeur de l'accélération de la fusée pendant la durée de l'étude est proche de  $7 \text{ m.s}^{-2}$ .

1.3.3. Préciser, en justifiant, la direction et le sens du vecteur accélération de la fusée.

1.4. Choisir parmi les propositions de la figure 5, le schéma compatible avec le décollage de la fusée. Justifier.

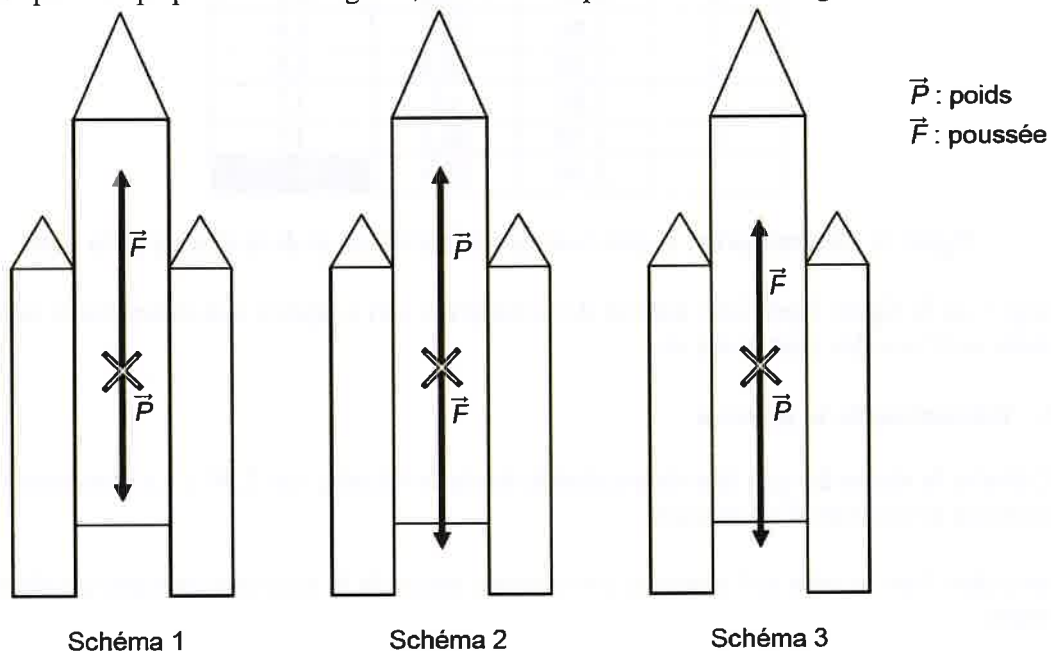


Figure 5. Propositions de représentation des forces s'appliquant sur la fusée qui vient de quitter le sol

1.5. À partir des résultats précédents, estimer la valeur de la force de poussée. Vérifier la cohérence de ce résultat avec les données.

## 2. Estimation de la puissance totale développée par la fusée Ariane 5 au début du décollage

Estimer la puissance moyenne fournie à la fusée par l'ensemble {moteur Vulcain + boosters}. Comparer cette valeur avec les données du texte d'introduction.

### EXERCICE N° 3 (3 points)

## AEROACOUSTIQUE

Contexte : afin de caractériser la signature acoustique de différents drones, petites voilures tournantes et autres « taxis volants » à décollage et atterrissage vertical (ADAV / VTOL) susceptibles d'être testés et certifiés à DGA-Essais en vol, on doit étalonner une chaîne d'acquisition audio. On ne s'intéresse qu'au bruit perçu au sol pour évaluer les nuisances dans le cadre d'une utilisation à très courte distance du public (milieu urbain, livraisons à domicile, secours aux victimes etc.), et on souhaite avoir une représentation de la « directivité » du son des aérodynes à évaluer au sol ou près du sol (l'intensité et les fréquences perçues sont différentes suivant la direction de l'observateur-auditeur par rapport à la machine et ses évolutions).

On va étalonner la chaîne d'acquisition analogique-numérique à l'aide d'un diapason à fourche constitué d'une pièce métallique en forme de U, à la base de laquelle est fixée une tige qui sert à le tenir à la main ou à le fixer à un support. Lorsqu'on frappe le diapason, il « sonne ».

Cet objet a été inventé au début du XVIIIème siècle par le luthiste anglais John Shore. Il servait alors à accorder tous les instruments d'un orchestre entre eux afin qu'ils jouent « juste ». La note de référence utilisée était souvent le « La3 », soit un son de fréquence 440 Hz (tonalité du téléphone lorsqu'on décroche pour composer un numéro).

Données :

- intensité sonore de référence :  $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$
- 1 octet = 8 bits

### 1. Caractéristiques du son produit par le diapason

On enregistre à l'aide d'un microphone relié à un dispositif d'enregistrement le signal sonore émis par un diapason, tenu à la main (sans caisse de résonance). On obtient le signal suivant (figure 1).

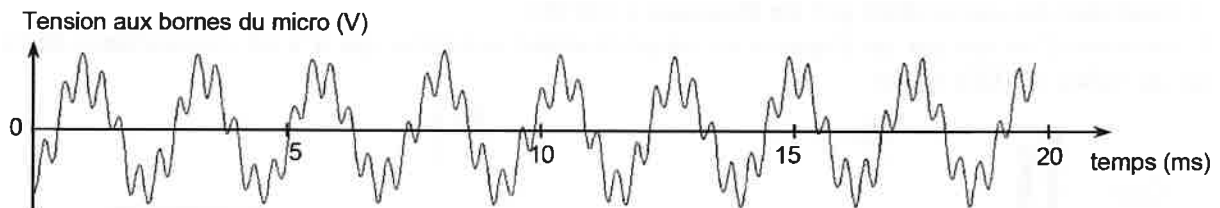


Figure 1.

1.1. Dans ces conditions d'utilisation du diapason, le son obtenu est-il pur ? Justifier.

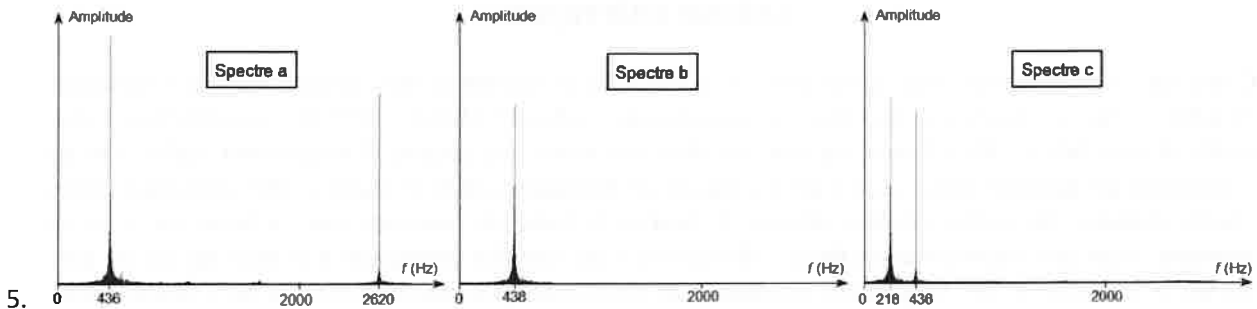
1.2. Le constructeur annonce que le diapason étudié est en acier et qu'il émet un La3, soit un son de fréquence 440 Hz. En exploitant au mieux l'enregistrement de la figure 1, estimer la période de ce signal. Le résultat est-il cohérent avec la donnée annoncée par le constructeur ? Justifier.

### 2. Numérisation d'un signal analogique

On enregistre le son émis par le diapason à l'aide d'un micro relié à un ordinateur. La tension aux bornes du micro est un signal analogique qui sera converti en signal numérique avant d'être stocké en mémoire.

Un logiciel permet d'obtenir son spectre (fréquences et amplitudes des sinusoides qui composent additivement un signal périodique stationnaire).

4. 2.1. Parmi les spectres ci-dessous (figure 2), lequel correspond au son enregistré ? Justifier.



6. Figure 2.

2.2. Comment distingue-t-on un signal analogique d'un signal numérique ?

La première étape de la conversion d'un signal analogique en signal numérique est appelée « échantillonnage ». Cette étape consiste à prélever à intervalle de temps régulier des valeurs du signal analogique. Cet intervalle de temps régulier est la période d'échantillonnage  $T_e$ . Après quantification, chacune des valeurs échantillonnées se voit attribuer un nombre binaire codé sur  $N$  bits : c'est le codage.

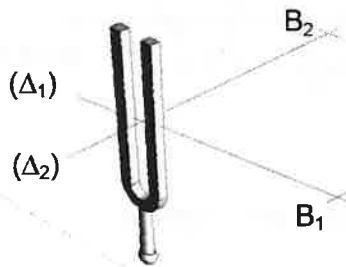
Le logiciel d'acquisition utilisé permet de choisir la durée totale  $\Delta t$  de l'enregistrement, la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  ainsi que le nombre  $N$ . Pour faciliter le transfert des données, on impose de réaliser un enregistrement dont la taille ne doit pas dépasser 500 ko.

2.3. Montrer qu'en choisissant  $\Delta t = 2,0$  s,  $f_e = 44$  kHz et  $N = 32$  bits, la condition sur la taille du fichier est respectée.

2.4. Quel est l'intérêt d'augmenter la valeur de la fréquence d'échantillonnage ? Quel serait l'inconvénient ?

### 3. Émission du son produit par un diapason à 440 Hz

L'émission d'un son par un diapason est un phénomène complexe qui n'a été correctement décrit qu'au milieu du XXe siècle.



8. Figure 3a.

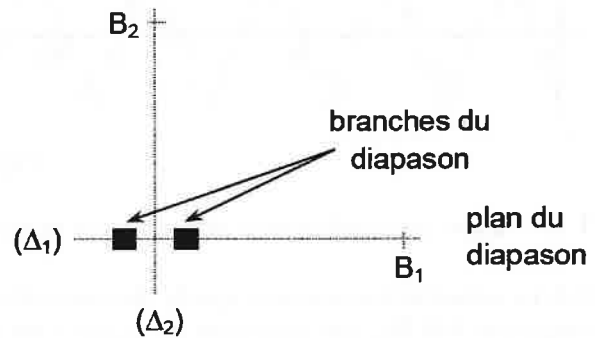


Figure 3b. (vue de dessus)

3.1. Afin d'étudier la manière dont le son est émis autour d'un diapason, on dispose de deux sonomètres en B1 et B2 à 1,0 m du diapason (figures 3a et 3b sans souci d'échelle).

Après avoir frappé le diapason, on relève au même instant les niveaux d'intensité sonore mesurés par chacun des sonomètres placés en B1 et B2 situés à 1,0 m du diapason. On obtient  $LB_1 = 59$  dB et  $LB_2 = 42$  dB.

Soient  $IB_1$  et  $IB_2$  les intensités sonores mesurées à l'instant considéré aux points B1 et B2, vérifier que  $IB_1$  et  $IB_2$  sont reliés approximativement par la relation :  $IB_2 = IB_1/50$



3.2. On étudie le niveau d'intensité sonore à un mètre du diapason à 440 Hz en tournant autour de celui-ci. La position du sonomètre est repérée par l'angle  $\theta$  dont l'origine correspond au plan du diapason (figure 4a). La courbe (figure 4b) représente l'atténuation de l'intensité sonore en fonction de l'angle  $\theta$ .

L'atténuation de l'intensité sonore est donnée par la relation :  $L - L_{\max}$  avec  $L$ , le niveau d'intensité sonore dans la direction repérée par l'angle  $\theta$  et  $L_{\max}$  le niveau d'intensité sonore maximal.

Montrer quantitativement que les deux mesures précédentes LB1 et LB2, sont cohérentes avec la figure 4b.

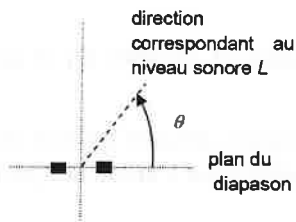


Figure 4a.

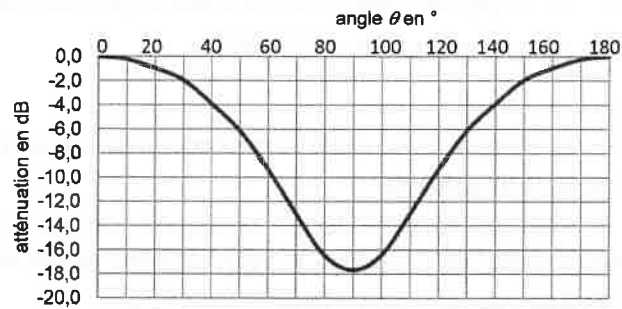


Figure 4b.

EXERCICE N° 4 (11 points) (1/2/3, 4/5 et 6 constituent trois parties indépendantes)

ÇA PLANE POUR MOI ...

On considère un aérodyne non motorisé en descente dont on va étudier les performances de plané (ce peut être n'importe quoi du moment que ce n'est pas une voilure tournante, que sa géométrie ne varie pas, et qu'elle est suffisamment stable pour que la direction de l'écoulement ne varie que très peu par rapport à sa géométrie : avion, missile, aile de saut ou de parapente etc.).

Notes :

- On considèrera l'angle de dérapage  $\beta$  et l'inclinaison  $\phi$  nuls
- L'indice a ( $C_{xa}$  par exemple) renvoie à une expression dans le repère aérodynamique (porté par le vecteur vitesse, opposé au vent relatif).

1) (1 point)

- Rappelez la relation liant angle d'incidence (ou angle d'attaque  $\alpha$ ), assiette ( $\theta$ ) et pente ( $\gamma$ ), en faisant en plus un schéma.
- Faites le bilan des forces externes appliquées sur un ou plusieurs dessins en vue de traiter la question suivante (on assimilera le véhicule à son centre de gravité pour l'étude des performances qui suit).

2) (1 point)

- Projetez le bilan des forces selon le repère (axes) lié au véhicule et écrivez les équations du mouvement correspondantes ( $n.M.g_0 = \Sigma(\text{Forces projetées})$  ;  $n_X.M.g_0 = \Sigma(\text{Forces projetées}_{\text{bis}})$ ) où :
  - $g_0$  est l'accélération de la pesanteur ;
  - $M$  est la masse du véhicule, constante ;
  - $n$  est défini comme le « facteur de charge normal » mesuré au centre de gravité (défini positif vers le dos ou l'extrados du véhicule  $n = -n_Z$ ) ;
  - $n_X$  est défini comme le « facteur de charge longitudinal » mesuré au centre de gravité (défini positif vers le nez du véhicule).
- Projetez le bilan des forces dans le repère terrestre local (porté par le véhicule) et écrivez les équations du mouvement correspondantes ( $M\ddot{h} = \Sigma(\text{Forces projetées})$  ;  $M\ddot{x} = \Sigma(\text{Forces projetées}_{\text{bis}})$ ) où :
  - $\ddot{h}$  est l'accélération verticale, définie positive vers le haut ( $\ddot{h} = -\ddot{z}$ )
  - $\ddot{x}$  est l'accélération longitudinale, définie positive vers l'avant

3) (1 point)

A quelle(s) condition(s) y-a-t-il équivalence (identité mathématiquement parlant) entre les expressions ?

4) (2 points) On définit :

- la pression dynamique en amont de l'écoulement  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2$  telle que :
  - $\rho$  est la masse volumique du fluide (fonction de l'altitude  $Z$ )
  - $V$  est la vitesse de l'écoulement ou vitesse aérodynamique (même module que la vitesse de déplacement de l'aérodyne dans la masse d'air, *True Air Speed* (TAS) ou  $V_{TAS}$  en anglais)
- l'équivalent-vitesse  $EV$  (*Equivalent Air Speed* (EAS) ou  $V_{EAS}$  en anglais), tel que :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = \bar{q} = \frac{1}{2}\rho_0 EV^2$$

où :

- $\rho_0$  est la masse volumique du fluide à l'altitude-pression  $Z_0$  (considérée comme le niveau de la mer ici donc  $Z_0 = 0\text{m}$ ), et vaut en condition standard  $1,225 \text{ kg/m}^3$

Et on montre par ailleurs que :

$$\tan \gamma_a = -\frac{C_{x_a}}{C_{z_a}} \frac{1}{1 + \frac{V}{g} \cdot \frac{dV}{dZ}}$$

où :

- $\gamma_a$  est la pente dans la masse d'air (on néglige l'effet du vent dans cet exercice)
- $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )
- $C_{x_a}$  et  $C_{z_a}$  sont respectivement les coefficients de traînée et de portance de l'aérodyne dans le repère aérodynamique tels que la traînée et la portance s'écrivent :

$$R_{x_a} = \bar{q} S_{REF} C_{x_a} \quad 9.$$

et

$$R_{z_a} = \bar{q} S_{REF} C_{z_a} \quad 10.$$

où :

- $S_{REF}$  est la surface de référence choisie pour exprimer  $C_{x_a}$  et  $C_{z_a}$
- Que se passe-t-il en terme de performance de plané lorsque la vitesse dans la masse d'air reste constante avec l'altitude ?
  - Que se passe-t-il en terme de performance de plané quand la vitesse dans la masse d'air est faible ?
  - On pose la densité relative  $\sigma = \rho/\rho_0$  et on fait l'hypothèse que pour l'atmosphère terrestre  $\sigma = e^{-aZ}$ . On pose également  $f = \frac{C_{z_a}}{C_{x_a}}$ . Montrez que si on descend à pression dynamique  $\bar{q}$  constante, la distance franchissable  $D$  pour une altitude de départ  $Z$  avant d'impacter la mer à  $Z_0$  vaut :

$$D = f \left[ Z + \frac{EV^2}{2g} \left( \frac{1}{\sigma(Z)} - 1 \right) \right]$$

(On rappelle que  $\ln(1+x) \approx x$  quand  $x$  est proche de zéro)

- Considérant que la pente de plané reste faible, et que le coefficient de portance  $C_{z_a}$  varie linéairement avec l'incidence (on néglige la portance à incidence nulle), montrez que piloter l'EV équivaut à piloter l'incidence  $\alpha$ .

Quelle est l'implication pour la distance franchissable en vol plané ?

## 5) Application numérique (2 points)

Quelle est la distance franchissable à partir du FL 600 dans ces conditions pour :

- La navette spatiale :  $C_{z_a}/C_{x_a} = 3,5$ ,  $M = 1,75$  initialement, en considérant la température constante à  $216^\circ\text{K}$ ,  $\gamma = C_p/C_v = 1,4$  et  $R = 287 \text{ J/kg/K}$ .

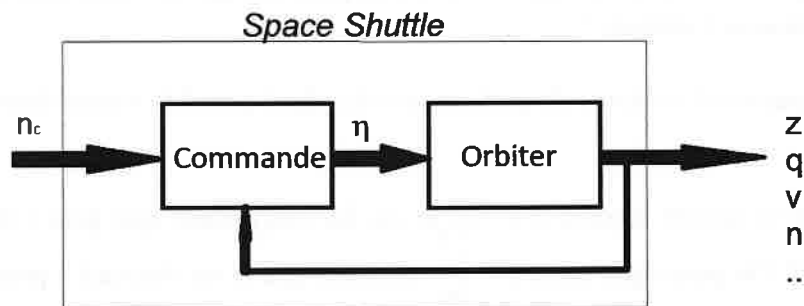
- b. Le drone « Haute Altitude Longue Endurance » *Global Hawk* en descente planée :  $C_{Z_a}/C_{X_a} = 35$  et  $V = 310$  nœuds au moment de quitter la croisière.  
 Pour CE calcul, on fera l'approximation  $\sigma(Z) = \rho/\rho_0 = \frac{20.000-Z}{20.000+Z}$  si  $Z$  est en mètres.

c. Commentez ces résultats.

6) Gestion automatique de l'énergie de la navette spatiale (4 points)

Après la phase de rentrée atmosphérique à très forte incidence ( $\alpha \approx 40^\circ$ ), la navette spatiale reste sous contrôle automatique à des incidences beaucoup plus faibles ( $\alpha \approx 10$  à  $12^\circ$ ), mais il ne s'agit pas tant de piloter avec précision cette incidence tant qu'elle reste dans les limites acceptables que de gérer au mieux l'énergie du véhicule par rapport à un optimum.

- 1) Montrez que l'énergie totale par rapport au référentiel terrestre et par unité de POIDS a les dimensions d'une longueur (« altitude totale »)  $Z_T$  et écrire son expression en fonction de l'altitude réelle  $Z$  et de la vitesse  $V$ .
- 2) Exprimer la différentielle  $dZ_T$  en fonction notamment de  $dZ$  et  $dV$
- 3) Comme avec n'importe quel aéronef, le pilotage en facteur de charge « commandé »  $n_c$  de la navette (Space Shuttle) fait réagir l'orbiter lui-même via la déflection de la profondeur  $\eta$  (*body flap* et/ou *élevons*) tant en altitude  $Z$  qu'en vitesse  $V$ , vitesse angulaire, facteur de charge, etc.



En fonction de la distance restant à parcourir jusqu'au point clef pour l'alignement et l'approche finale, on doit gérer cette énergie totale selon deux options : en évaluant l'altitude par rapport à une valeur consigne  $Z_c$  et la corriger, ou bien en évaluant la vitesse par rapport à une consigne  $V_c$  :

- i.  $n_c = K_1(z_c - z) - K_2\dot{z}$
- ii.  $n_c = K_1(v_c - v) - K_2\dot{v}$

- a) En combinant l'utilisation de la profondeur  $\eta$  et l'aérofrein, on est capable de bien découpler les réponses longitudinales et verticales, et, au mieux, de piloter des variations de l'ordre de 1% sur l'altitude (variations de 1000 pieds à 100.000 pieds, 500 à 50.000, etc.), ainsi que sur la vitesse (variations de 10 m/s à 1000 m/s, 5 m/s à 500 m/s, etc.) pendant toute la descente. Justifiez à l'aide de la différentielle et pour le point de vol  $M = 1.75$  au FL600 le choix de l'option de pilotage en altitude (i.) ou en vitesse (ii.) pour la gestion de l'énergie.
- b) Représenter la loi, retenue sur un schéma-bloc sans détailler la commande et l'orbiter.

## À REMPLIR PAR LE CANDIDAT

Titre/Grade :	Prénom :	NOM :
Employeur :		Unité :
Spécialité essais présentée* :	PEXA    PEXH    INE (option Avions)	INE (option Hélicoptères)
(* Rayer les mentions inutiles)		

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION AU****STAGE ESSAIS DE CLASSE A 2020 - 2021**

---

**SESSION DU 18 NOVEMBRE 2019**

---

Durée : 3 heures - Pas de document - Calculatrice de poche non graphique et non programmable autorisée.

Validé par :

NOM :
Date :

NOTE :	/ 20
--------	------

EXERCICE N° 1) (2 points)

Consommation impulsive...

On applique le qualificatif « spécifique » à une grandeur pour signifier qu'elle se comprend « par unité de » (masse, volume, force etc.)

L'impulsion d'une force  $\vec{I}$  est une quantité **vectorielle** définie telle  $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}. dt$

On peut comparer l'*efficience* d'un générateur de poussée à un autre (typiquement un turboréacteur ou un moteur fusée) soit en considérant  $C_{sp}$ , sa *consommation* (massique) *spécifique* (i.e. par unité de poussée), soit son *impulsion spécifique*  $I_{sp}$  (i.e. par unité de poids consommée, avec  $g = g_0 = 9.81m/s$ ).

- 1) En considérant une force moyenne  $\vec{F}_{moy}$ , écrivez la relation liant la consommation spécifique à l'impulsion spécifique.
- 2) On peut dès lors établir au premier ordre une relation simple entre la vitesse d'éjection des gaz  $V_e$  d'une part et  $I_{sp}$  ou  $C_{sp}$  d'autre part. Considérant un générateur de poussée à simple flux (turboréacteur « pur »), toute chose étant égales par ailleurs, améliore-t-on respectivement  $I_{sp}$ ,  $C_{sp}$  en augmentant ou en diminuant  $V_e$  ?

**EXERCICE N° 2) (4 points)**

« Keep Cool »

Nota : parties 1) et 2) indépendantes

Afin de s'affranchir de la dépendance au kérosène et face à la montée des menaces balistiques et hyper-véloces « proliférantes », la DGA et l'industrie ont décidé de développer et mettre au point un intercepteur hypersonique. Sa propulsion sera notamment assurée par des turboréacteurs fonctionnant au méthane liquéfié à basse température (LCH<sub>4</sub>, issu de Gaz Naturel liquéfié ou synthétisé). Pour éviter l'évaporation naturelle et se passer d'un lourd système de conditionnement actif, ceci implique « nécessairement » des temps de vol courts, donc de très grandes vitesses si l'on veut avoir un grand rayon d'action. En retour, on utilise ce carburant comme « puits de chaleur » pour refroidir la structure, abaisser la température de l'air admis aux moteurs, puis l'injecter sous forme gazeuse dans les chambres de combustion.

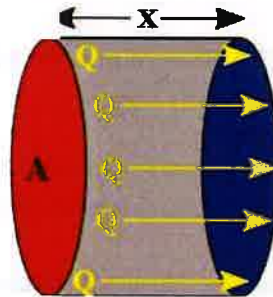
Le bord d'attaque, perpendiculaire à l'écoulement, et à travers lequel est admis le carburant est réalisé en alliage résistant aux très hautes températures (Inconel), et le LCH<sub>4</sub> sort à -162°C du réservoir pressurisé à 1 atmosphère (1013.25 hPa) à l'altitude de vol considérée, compromis entre la masse du réservoir et la limitation de la vaporisation spontanée. On l'assimilera à une conduite circulaire, de température toujours égale à la température du « point d'impact » (T<sub>i</sub>) telle que

$$T_i/T_s = (1 + (\gamma_{\text{air}} - 1)/2 * M_0^2) \quad \text{où}$$

T<sub>s</sub> est la température statique (ambiante) à l'altitude de vol considéré (en Kelvin)

$\gamma_{\text{air}}$  est le rapport des « chaleurs massiques » de l'air à pression/volume constant  $C_{p\text{air}}/C_{v\text{air}} = 1.4$

M<sub>0</sub> est le nombre de Mach de vol (ou de l'écoulement à l'infini amont)



1) Dans un barreau homogène de section A (en m<sup>2</sup>) et isolé mis simplement en contact avec une source chaude et une source (plus) froide (de températures respectives T<sub>c</sub> et T<sub>f</sub>), le taux de transfert par conduction de chaleur dQ (en J) par unité de temps dt vaut :

$$dQ/dt = -\kappa \cdot A \cdot dT/dx$$

où  $\kappa$  est le coefficient de conduction (ou conductivité) thermique et x (en m) est défini positivement en allant de la source chaude vers la source froide.

- Donnez l'unité de  $\kappa$
- Montrez que dans le cas d'une conduite circulaire de rayon interne  $r_a$  et externe  $r_b$  et de longueur L, considérant des températures T<sub>a</sub> et T<sub>b</sub> uniformes, ce taux de transfert de chaleur vaut :

$$dQ/dt = 2\pi \cdot \kappa \cdot L \cdot (T_a - T_b) / \ln(r_b/r_a)$$

2) en considérant :

- Un débit massique  $D_{CH_4} = dm/dt$  de carburant LCH4 constant
- Une température d'admission ( $T_{cryo\_LCH_4} = -162^\circ C$ ) dans le bord d'attaque pratiquement égale à la température de vaporisation sous 1 atm ( $T_{vaporisation\_LCH_4} = -161.48^\circ C$ )

a) Estimer à partir de quelle longueur du bord d'attaque le méthane s'écoule sous forme exclusivement gazeuse.

Données :

- Chaleur latente de vaporisation du méthane liquide (à  $-161.48^\circ C$  sous 1 atm) :  $Q_{Lvap} = 510.83 \text{ kJ/kg}$
- Masse volumique du méthane liquéfié (à  $-162^\circ C$  sous 1 atm) :  $\rho_{cryo\_LCH_4} = 422,36 \text{ kg/m}^3$
- Masse volumique du méthane gazeux ( $>-161.48^\circ C$  sous 1 atm) :  $\rho_{gaz\_CH_4} = 1,816 \text{ kg/m}^3$
- Capacité calorifique du méthane à pression constante :  $C_{pCH_4} = 2000 \text{ J/kg/K}$
- Capacité calorifique du méthane à volume constant :  $C_{VCH_4} = 1538 \text{ J/kg/K}$
  
- Longueur du bord d'attaque (1/2 envergure) :  $L = 5 \text{ m}$
- Rayon interne du bord d'attaque :  $r_a = 45 \text{ mm}$
- Rayon externe du bord d'attaque :  $r_b = 50 \text{ mm}$
- Conductivité thermique de l'Inconel X-750 :  $K_{X-750} = 20 \text{ S.I.}$
  
- Constante thermique spécifique de l'air :  $R_{air} = 287 \text{ J/kg/k}$
  
- Débit massique de carburant :  $D_{CH_4} = 4,52 \text{ kg/s}$

Le point de vol considéré est Mach 3.85 à 20 km d'altitude où il règne une température de  $-56^\circ C$ , et une pression de 5529 Pa.

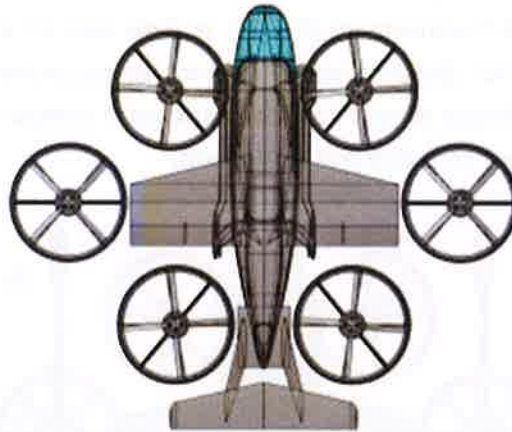
- b) Estimez le Mach minimum de vol pour que le carburant soit entièrement transformé en gaz lors de son passage dans le bord d'attaque (nécessaire avant son injection dans le moteur).
- c) En considérant l'équation de continuité, calculez la vitesse d'écoulement du CH4 en phase purement liquide, puis purement gazeuse dans la conduite. Calculez le nombre de Mach en phase gazeuse.
- d) Sans préjuger d'un quelconque dispositif en aval ou variation de section, qualifieriez-vous l'écoulement restant dans le bord d'attaque du méthane gazeux (entourez) de :
1. Isotherme
  2. Adiabatique
  3. Isentropique
- e) Du fait des caractéristiques aérodynamiques de l'intercepteur, on estime la pression dynamique « amont » minimale pour la sustentation à l'altitude considérée à 8600 Pa. Faites le lien avec le Mach minimum de vol calculé en b) et statuez sur le caractère prioritairement limitatif de la sustentation ou de la propulsion.



EXERCICE N° 3) (6 points)

« Blade Runner »

Las Vegas, 2019 : La Bell Corporation a présenté au Consumer Electronics Show (- qui n'a rien d'aéronautique) en Janvier la maquette à l'échelle 1 de son prototype « Nexus », dont le groupe SAFRAN assure le système de propulsion hybride (turbine-électrique) de cet appareil à 6 rotors carénés, capables de transporter 5 occupants...quelque part.



MTOM = 2722 kg

A)

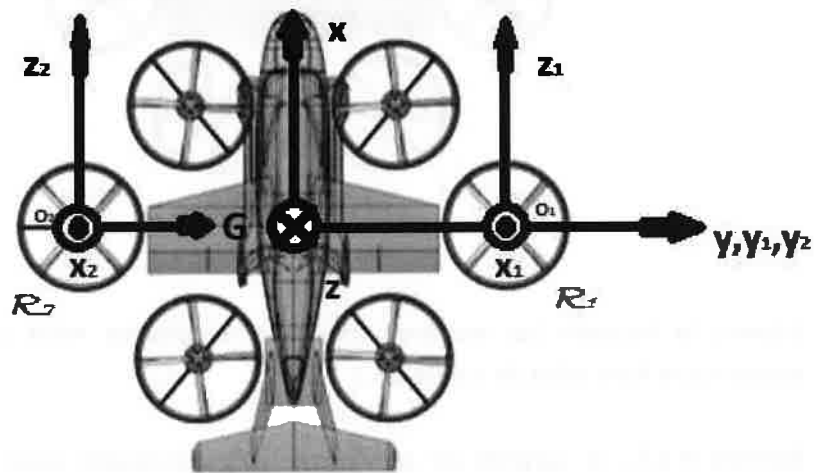
- 1) Estimez la Poussée (ou traction) moyenne de chaque rotor pour maintenir le vol stationnaire hors-effet de sol (H.E.S.)
- 2) Estimez H.E.S., le surcroît de puissance  $\Delta P_n$  nécessaire pour assurer une montée verticale continue à un minimum de 1 m/s (200 ft/min environ) à cette masse MTOM, en négligeant la traînée aérodynamique du véhicule.
- 3) On souhaite pouvoir établir ce taux de montée en 4 secondes maximum. En déduire la poussée minimale requise pour chaque rotor et la puissance développée à 1m/s (le couple mécanique des moteurs électriques entraînant chaque rotor varie de manière instantanée, donc la poussée qui en résulte aussi, et il n'y a aucune perte par soufflage du fuselage comme le montre le plan). Calculer le gradient de puissance  $K_{P_n} = \partial P_n / \partial T$  (en W/N) à la masse maximale de la machine pour de faibles variations de vitesse ascensionnelle  $V_z$  et d'avancement  $V$  (on considère que cette poussée initiale  $T_i$  calculée finit en réalité par équilibrer le poids et la traînée du véhicule en montée verticale à  $V_z = 1$  m/s).

- 4) Calculez le rendement global de propulsion  $\eta_p = \frac{P_n}{P_u} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{T_i/S_r}{\frac{1}{2}\rho_0 V_z^2} + 1}}$  avec  $\rho_0 = 1.225$

kg/m<sup>3</sup> où  $P_u$  est la puissance « utile » ou motrice (en sortie de moteur électrique et consommée en totalité par chaque rotor de surface active  $S_r = 4,670$  m<sup>2</sup>).

B)

Chaque rotor  $R_i$  tourne à vitesse de rotation constante  $\omega_i$ . Toute augmentation de puissance se traduit par un surcouple (nécessaire pour vaincre la traînée de rotor supplémentaire induite par la modification du pas collectif du rotor en question), et on peut considérer que le couple  $C_i$  transmis est proportionnel à la poussée/traction  $T_i$  d'un rotor :  $T_i = K.C_i$  (on considère  $K$  constant autour des faibles  $V_z$  et  $V$ ). En stationnaire et vu d'au-dessus, Les rotors du côté droit tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, et inversement côté gauche. Les rotors peuvent indépendamment être positionnés parallèlement à l'avancement ( $\delta_i = 0^\circ$ ), et dans tous les angles intermédiaires, y compris au-delà de  $\delta_i = 90^\circ$ . (Note : malgré l'absence de pas cyclique, on considère que  $T_i$  s'exerce au centre de chaque disque de rotor, sans autre composante de moment que le couple de renversement  $M_i$  induit par sa rotation)



- 5) On veut générer un moment de lacet autour du stationnaire en basculant de manière antisymétrique les rotors en bout de voilures (si le rotor droit bascule de  $\theta_1$  vers l'avant, le rotor gauche bascule de  $\theta_2$  vers l'arrière et  $\theta_2 = -\theta_1$ ). Ecrivez la relation reliant  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

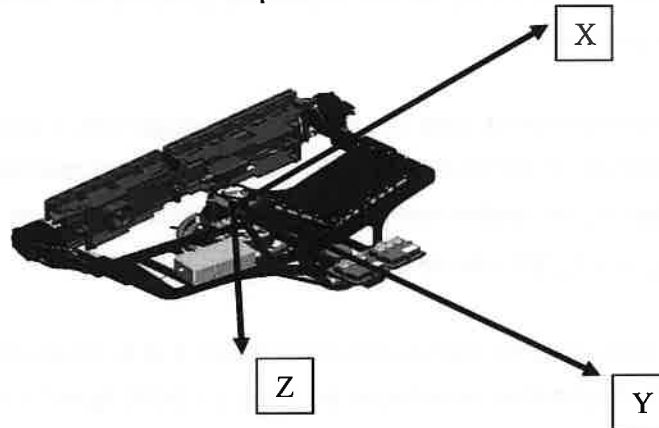
Note : Les questions 6 et 7 peuvent être traitées simultanément en écrivant le torseur des forces extérieures appliquées au Nexus.

- 6) On note  $b$  ( $O_1O_2$ ) la distance entre les centres des rotors, droite qui passe par le centre de gravité  $G$  du Nexus. Faites le bilan des forces pour des positions quelconques  $\delta_i$ . Que peut-on conclure autour du stationnaire si  $\theta_2 = -\theta_1$ ? Exprimez la traction unitaire (et unique)  $T_x$  de chaque rotor, si on cherche à répartir également le surcroît de traction entre les 6 rotors.
- 7) Faites le bilan des moments de force appliquées au Nexus que vous simplifierez en appliquant les contraintes et résultats précédents, exprimées en fonction de  $T_1$ ,  $\delta_1$ ,  $M_1$  (module du couple transmis par la rotation de  $R_1$ , défini positif dans le repère lié  $\mathcal{R}_1$ ). Montrez qu'on induit forcément du roulis et précisez si c'est dans le sens du virage ou dans le sens opposé.

- 8) Connaissant les moments d'inertie  $I_x$  (en roulis) et  $I_z$  (en lacet), déduisez-en une relation liant  $I_x$ ,  $I_z$ ,  $\dot{p}$ , (accélération en roulis),  $\dot{r}$  (accélération en lacet),  $b$ ,  $T_1$  et  $M_1$ . (les produits d'inerties sont nuls, du fait du plan de symétrie de l'aéronef et on considère GX comme un axe d'inertie)
- 9) Ecrivez la relation liant une variation de couple  $dM_1$  à une variation de puissance « utile » (motrice, en sortie d'arbre)  $dP_{u_1}$ . en déduire une relation entre la vitesse de rotation du rotor  $\omega_1$ , le rendement global de propulsion  $\eta_p$ ,  $T_1$  et  $M_1$  et le gradient de puissance  $K_{P_n} = \partial P_n / \partial T$  calculé précédemment.
- 10) En reprenant les expressions trouvées en 8 et 9, trouvez l'expression de couplage inertiel  $\dot{p}/\dot{r}$ . Application numérique  $b = 4,5\text{m}$ ,  $I_x = 5600 \text{ kg.m}^2$ ,  $I_z = 7000 \text{ kg.m}^2$ ,  $\omega_1 = 2500 \text{ tr/min}$ .
- 11) Que se passe-t-il quand on passe d'un taux de virage (lacet à plat) « 1 » ( $180^\circ$  en une minute) à un taux « 2 » ( $180^\circ$  en 30s).
- 12) Toujours dans ce régime quasi-stationnaire (pas de portance aérodynamique), que proposeriez-vous de faire (qualitativement) avec les 4 rotors restants ( $\omega_i$  constant, mais  $T_i$  pilotable indépendamment) pour compenser le couplage inertiel roulis/lacet, et avec quelle(s) conséquence(s)
- Sur le taux de virage/lacet à iso- $\delta_i$  ?
  - Sur les  $\delta_i$  (ou  $\theta_i$ ) à iso-taux de virage/lacet ?

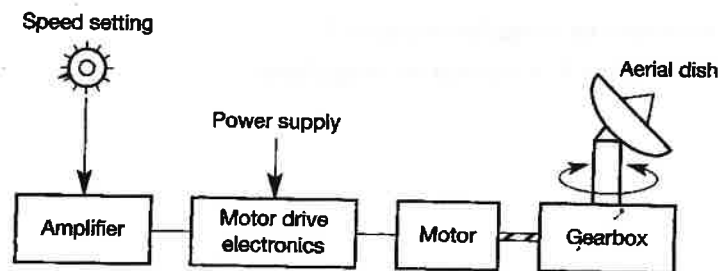
EXERCICE N° 4) (5 points)

Satcom aéroportée

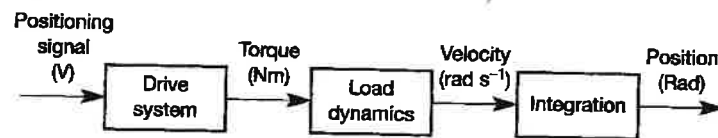


Vous êtes en charge d'organiser les essais d'ouverture de domaine d'un système de communication par satellite à balayage électronique sur le dos d'un gros-porteur. Pour son pré-pointage en azimuth et élévation vers le satellite, elle est pourvue de deux axes mécaniques de roulis des antennes de transmission et de réception et de lacet (axe Z selon lequel s'effectue l'interface avec l'avion). Dans ce qui suit, on va considérer que les mouvements en roulis et tangage du porteur sont négligeables (cas « croisière » avec changement de cap très lent).

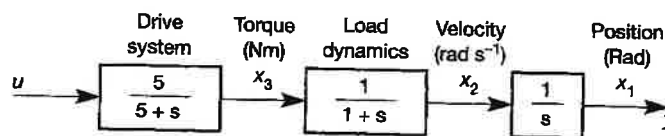
A) Dans l'étude de l'axe de lacet, on s'intéresse d'abord au système antennaire seul.



On peut le modéliser comme un système continu en fonction de la variable de Laplace  $s$  :



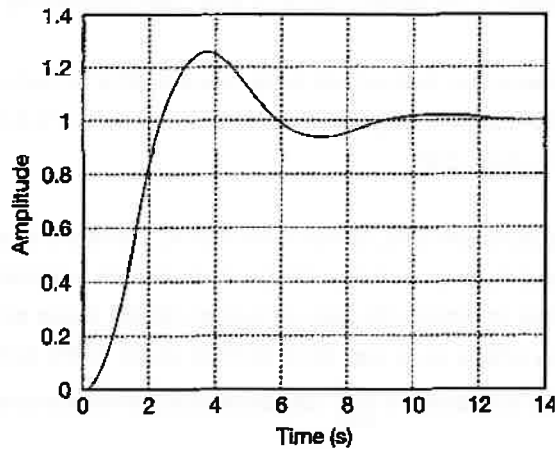
(a)



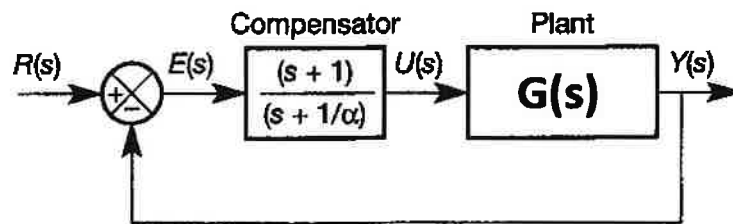
(b)

- 1) Ecrire la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ , en précisant si le système peut osciller et statuer sur sa stabilité ; puis en boucle fermée en considérant un simple gain proportionnel  $K_{x_1}$

- 2) Avec une valeur de gain « optimale »  $K_{X_1}$  respectant à la fois le critère de stabilité et donnant le meilleur compromis dépassement de la consigne (*overshoot*)/temps de convergence, on obtient la réponse ci-après pour une échelon unitaire :



- a) Estimez la fréquence propre amortie  $\omega_d$  du système et en considérant la règle approximative qui donne l'amortissement réduit ( $n$  est le nombre de dépassements/overshoots)  $\zeta = \frac{7-n}{10}$ , estimez la valeur de la fréquence propre naturelle (i.e. non amortie)  $\omega_n$  d'un système équivalent d'ordre 2 qui aurait la même réponse temporelle à un échelon unitaire.
- b) Estimez la valeur du gain  $K_{X_1}$  d'après la réponse temporelle
- c) Considérez-vous que les performances du système sont satisfaisantes ?
- B) Il est finalement proposé de rajouter un compensateur « *feedforward* » avant le système physique pour anticiper le retard (« *lead-lag compensator* »)  $F(s) = \frac{(s+1)}{(s+\frac{1}{\alpha})}$  tel que :



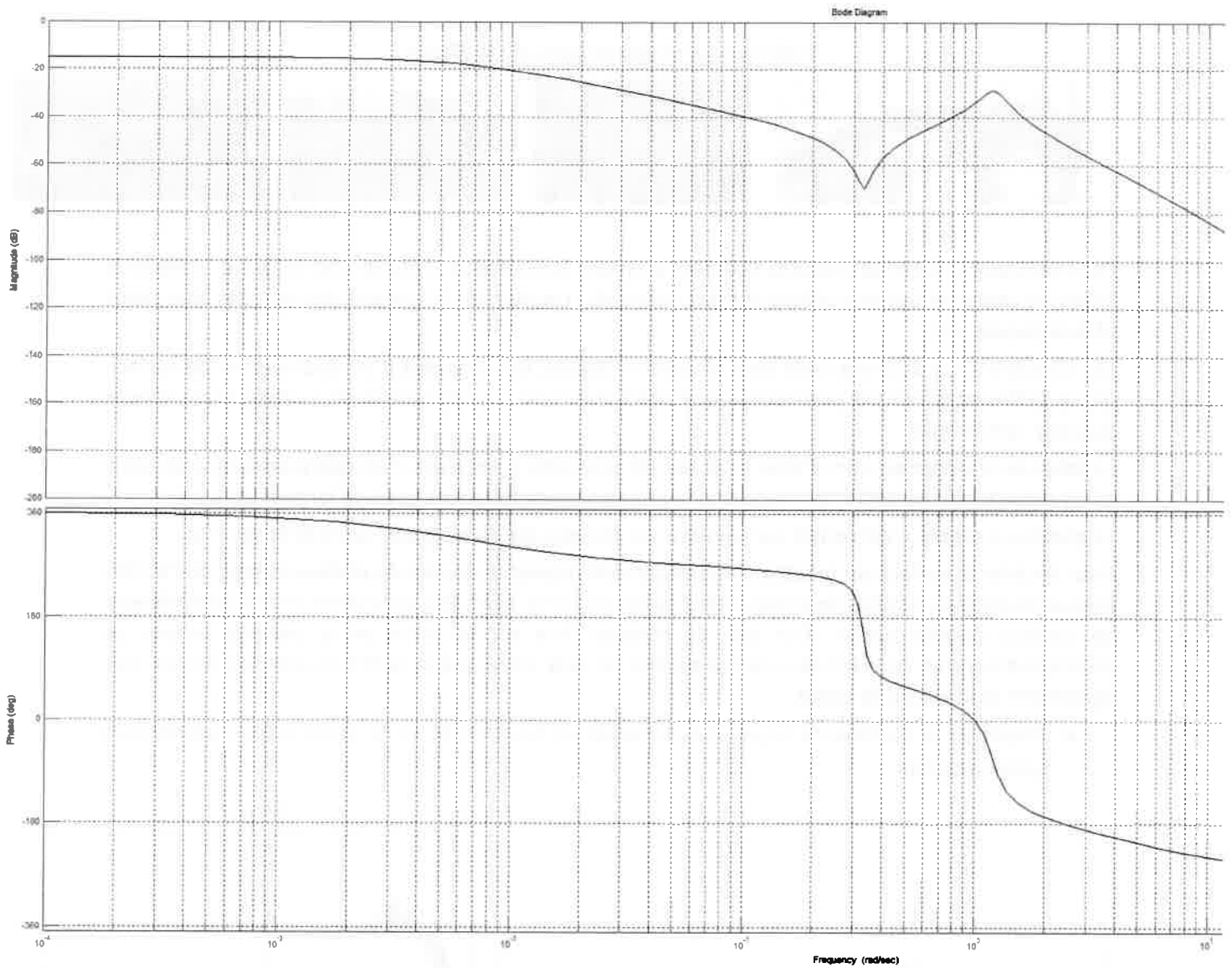
Mais il s'agit maintenant de procéder aux essais sur un gros porteur dont, à Mach 0,44 et 15000ft et pour 87,4 tonnes, la fonction de transfert reliant la vitesse de lacet  $r$  (en rad/s) à une déflexion de la gouverne de direction  $\zeta$  (en rad) s'écrit :

$$\frac{r(s)}{\zeta(s)} = \frac{-0,864(s + 1.335)(s^2 - 0.03s + 0.109)}{(s + 0.0065)(s + 1.329)(s^2 + 0.254s + 1.433)} = GP(s)$$

Cette vitesse de lacet, définie positive selon la même convention, vient s'ajouter aux mouvements de l'antenne satellite (on néglige le couplage avec le roulis, qui n'est apparent qu'à plus long-terme dans le « roulis hollandais »), telle que  $\Omega(s) = r(s) + x_2(s)$ .

Ce qui préoccupe l'industriel, c'est de rester en-deçà d'une certaine valeur de couple dans la transmission du *drive system* (DS) et de l'antenne (*load dynamics* LD) elle-même lors des actions aux palonniers au programme de l'étude des réponses du système [aéronef + satcom] aux entrées EICDV (Effets Initiaux des Commandes de Vol).

- a) Refaites un schéma-bloc permettant de faire apparaître en sortie le couple ( $x_3(s)$ ) dans le schéma (b) en A) et la déflexion de la gouverne  $\zeta(s)$  en entrée (en n'oubliant pas de faire apparaître  $r(s)$ ;  $x_2(s)$ ;  $\Omega(s)$ ;  $Y(s)$ ;  $R(s)$ ;  $E(s)$ ).
- b) Ce système est multi-entrées, mono-sortie (MISO : *multiple input-single output*), la fonction de transfert dépend de deux entrées. On peut cependant considérer que comme la consigne est constante sur  $R(s)$  (maintien de cap), il s'agit en réalité d'une perturbation ou d'un biais...égal à zéro dans le cas précis où le cap de référence serait défini comme nul (ex : Nord par hasard). Ecrire la fonction de transfert  $\frac{x_3(s)}{\zeta(s)}$  complète sous forme numérique, sachant que  $\alpha = 0,5$
- c) Sans préjuger d'un « pic » de couple dynamique éventuel en transitoire à analyser séparément, déterminez le couple établi pour un « échelon » (déflexion) lent(e) de  $13^\circ$  de gouverne de direction  $\zeta$  (50%), puis de  $26^\circ$  (100%). Quelle(s) réserves émettriez-vous sur la prédiction du couple pour  $26^\circ$ .



- d) La réponse fréquentielle du système SatCom + gros porteur  $\frac{x_3(s)}{\zeta(s)}$  (en boucle ouverte) est présentée ci-dessus (le gain  $y$  est exprimé en n.m/deg avant de l'exprimer en dB. Déterminez sa marge de gain et sa marge de phase.
- e) Concluez sur la stabilité du système si on ferme la boucle (limitateur de débattement de gouverne pour éviter un éventuel surcouple)

EXERCICE N° 5) (3 points)

Voilure basculante et table de la Draye



De nombreux projets de voitures volantes animent les bureaux d'étude. Par le passé, différents types de concepts ont été utilisés sur des avions : rotation de la voilure, repliage des ailes, ailes télescopiques, etc.

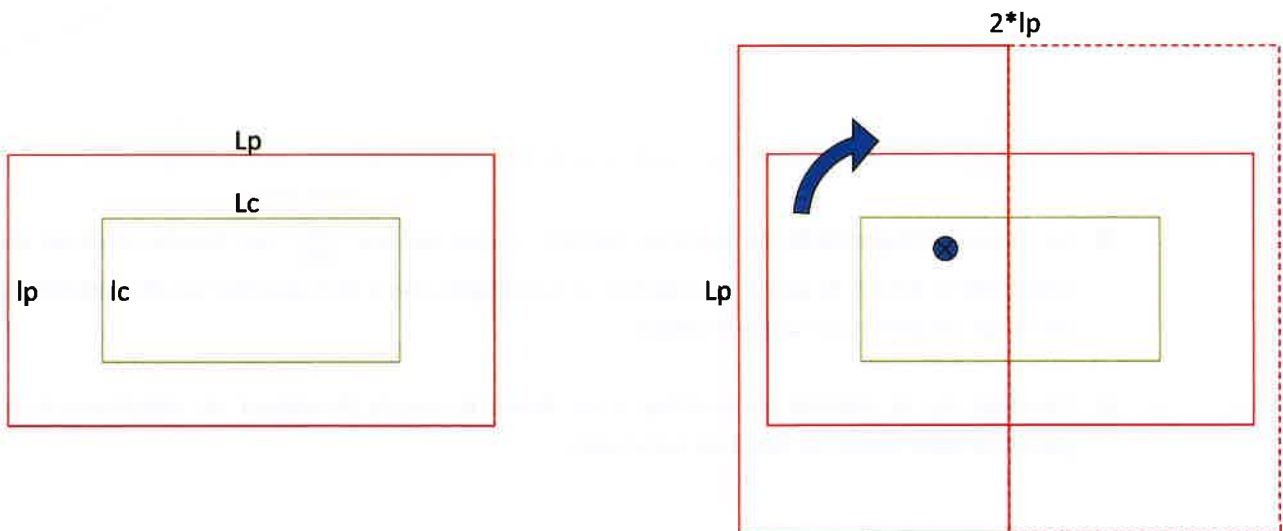
Les concepts issus de la vie civile sont souvent réutilisés, et le concept d'un doublement de surface d'une table est à l'étude pour voir son emploi éventuel. Le triplement de surface étant simple puisque symétrique.

La table de la Draye qui sert d'idée à l'étude est une table composée d'un cadre portant avec ses 4 pieds aux 4 coins. Ce cadre, qui supporte le plateau est de longueur  $L_c$  et de largeur  $l_p$ .

Le plateau « simple » est centré sur le cadre. Ce plateau est de longueur  $L_p$  et de largeur  $l_p$ .

Pour doubler la surface de la table, l'opérateur doit déplier le double du plateau le long de l'arrête longue du plateau simple (longueur / table passe de  $L_p \cdot l_p$  à  $L_p \cdot 2l_p$ ), et tourner ce nouveau plateau de surface double autour d'un axe de rotation fixe sur le cadre et le plateau simple. Le positionnement de ce point de rotation est fait de telle sorte que le centre du plateau double soit également centrée sur le cadre.

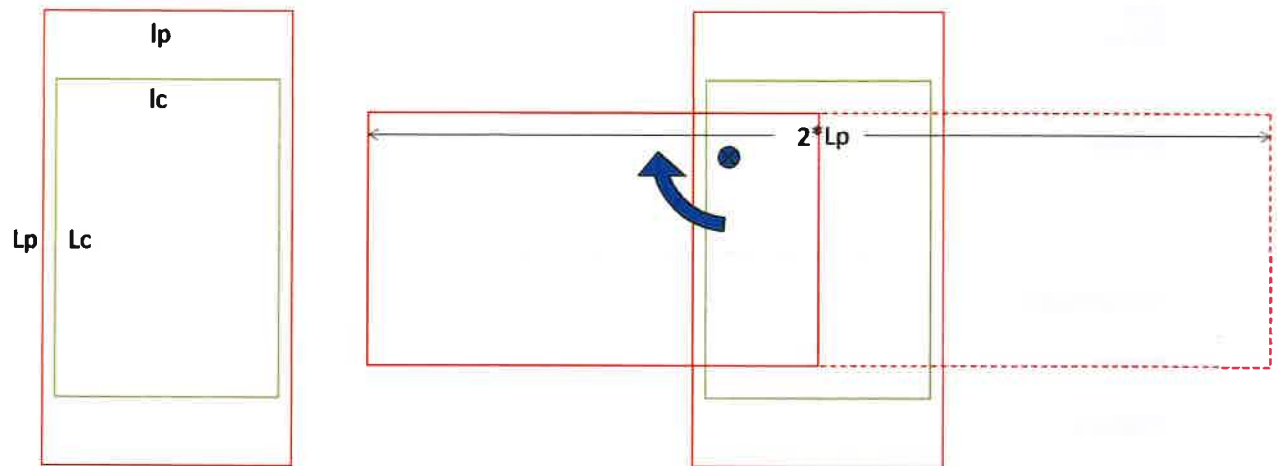
- a) Exprimer la position de ce point de rotation en fonction de  $L_c$ ,  $l_c$ ,  $L_p$  et  $l_p$  par rapport à un point à définir.





b) Quelle condition est nécessaire entre les tailles du cadre et du plateau ?

c) Quid si le dépliage se fait le long de l'arrête petite du plateau simple (largeur / table passe de  $L_p * l_p$  à  $2L_p * l_p$ ) ?



Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

---

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »

---

SESSION DU 16 NOVEMBRE 2020

---

ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES

---

Durée : 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée –  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur le sujet

Document validé par :

Nom :

Date :

Signature :

### Exercice 1 : 42500 tonnes de diplomatie

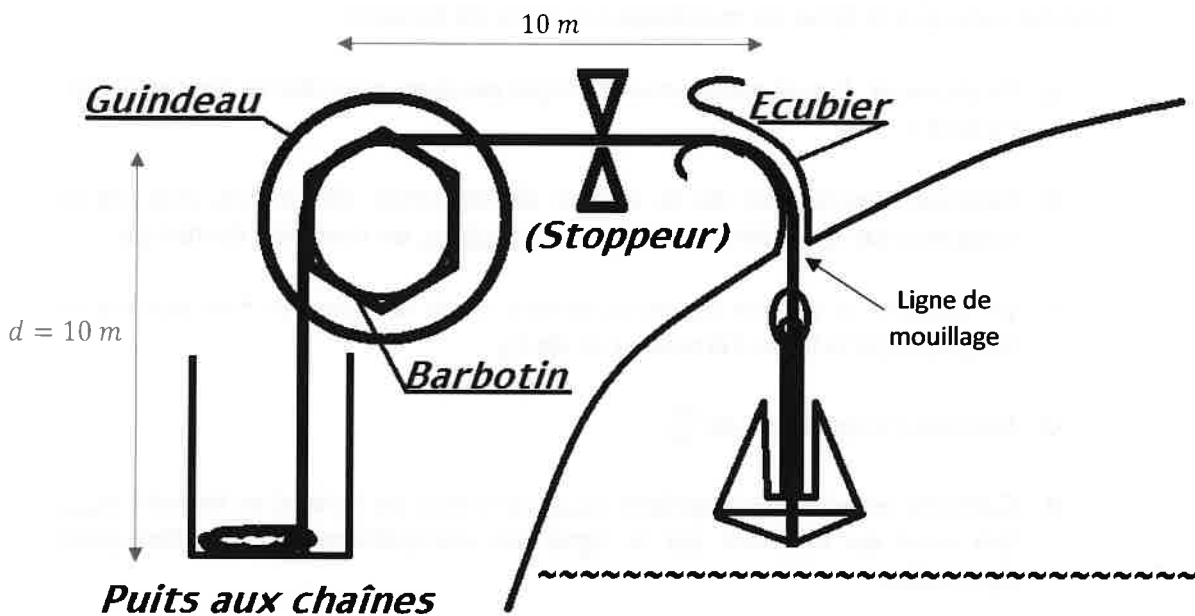
« On trouve plus d'avions au fond de la mer que de sous-marins dans le ciel » (A. Nonyme) ....

...et il y a au moins une chose que le porte-avions Charles-De-Gaulle peut y envoyer : ses ancres.

Le P.A. CDG dispose de deux lignes de mouillage en plage avant (une à tribord, une à bâbord), constituée comme ci :

Longueur de la ligne de mouillage :  $L = 320 \text{ m}$

Masse totale de ligne de mouillage :  $M = 80 \text{ tonnes}$  (dont  $12 \text{ tonnes}$  d'ancre)



En croisière, la ligne repose essentiellement dans le puits aux chaînes. En vue du mouillage, elle en est extraite par un moteur accouplé au guindeau, lequel peut également servir de frein pendant le déroulement. Les mailles de la ligne sont entraînées par le barbotin (donc sans glissement), solidaire du guindeau. Le stoppeur n'intervient pas dans la phase « active » du mouillage de l'ancre (déroulement continu).

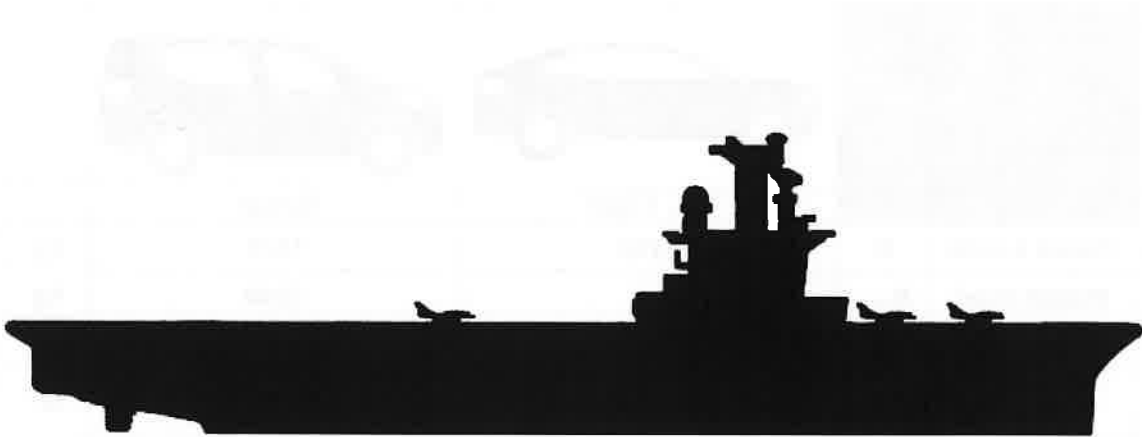
On considère qu'en sortie d'écubier, l'ancre et sa ligne restent toujours parfaitement verticales, et qu'il n'y a pas de frottement dans l'écubier. Le fond du puits aux chaînes est estimé à une dizaine de mètres de la surface du pont ( $d = 10 \text{ m}$ ), où chemine la ligne jusqu'à l'écubier, également sur  $10 \text{ m}$  (on a bien  $300 \text{ m}$  de ligne effective depuis l'écubier quand tout est déroulé).

Enfin on nomme le rayon du barbotin  $R_B$ , et on négligera la traînée de l'ancre et de la ligne dans l'air ou dans l'eau.

On prendra  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

- 1) Calculez la masse linéique  $m_L$  ( $kg/m$ ) de la ligne de mouillage seule (sans compter l'ancre).
  
- 2) Ancre en position haute, que se passe-t-il quand les mâchoires du stoppeur s'ouvrent, en l'absence de couple de freinage (le moteur n'exerce aucune résistance au mouvement de la ligne)?
  
- 3) On considère dans un premier temps une absence totale de freinage et d'inertie du guindeau/barbotin (accompagnement du mouvement), l'ancre tombe sans que la ligne de mouillage n'exerce de tension.
  - a. Finalement, à quel mouvement simple peut-on assimiler la descente de l'ancre?
  
  - b. Donnez l'expression de la vitesse de descente de l'ancre, puis de la longueur de ligne déroulée  $l$  depuis l'écubier, en fonction du temps.
  
  - c. En déduire la vitesse de déroulement  $\omega$  de la ligne, en fonction de la longueur de la ligne déroulée  $l$  et de  $R_B$ .
  
  - d. Donnez l'expression de  $\frac{d\omega}{dt}$ .
  
  - e. Calculez les vitesses angulaire  $\omega_{MAX}$  (en  $rad/s$  et  $tr/min$ ) et linéaire  $v_{MAX}$  (en  $m/s$ ) au moment où la ligne est complètement déroulée pour  $R_B = 2,5m$ .
  
  - f. Calculez la vitesse angulaire  $\omega_{1/2}$  à la moitié du déroulement ( $l = 150 m$ ).
  
- 4) On considère maintenant un nouveau système de freinage électromagnétique (par courants de Foucault) tel que le couple de freinage soit  $C_F = -K_F\omega$ .
  - a. Ecrire l'équation du mouvement en fonction de  $\omega$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $R_B$ ,  $m_L$ , de la masse de l'ancre, de la longueur de ligne depuis l'écubier  $l$ , de la distance entre Guindeau et puits aux chaînes  $d$  et du moment d'inertie du guindeau/barbotin  $J_{GB}$ .
  
  - b. Posant  $J_{GB} = 0$ , calculez  $K_F$  en donnant ses unités, pour que le couple de freinage s'oppose aux forces provoquant le mouvement à la moitié du déroulement sans frein.

- c. Justifiez l'hypothèse précédente en calculant  $J_{GB}$  (et en précisant ses unités) que l'on assimilera à un cylindre plein de masse  $M_B = 5 t$  et de Rayon  $R_B = 2.5 m$ , puis en calculant le terme  $J_{GB} \frac{d\omega}{dt}$  dans le pire cas possible (c'est-à-dire sans freinage électromagnétique).
- d. Le navire au mouillage a sa ligne tendue, qui doit être assez longue pour que l'ancre soit bien horizontale. La longueur de ligne dans l'eau doit être égale à 7 fois la hauteur entre l'écubier (10 m au-dessus de l'eau environ) et le fond de la mer.
- Jusqu'à quelle profondeur peut-on utiliser l'ancre du bateau ?
  - Quelle est la vitesse angulaire  $\omega$  au moment de toucher le fond sans couple de freinage ?
  - Quelle est la vitesse angulaire  $\omega$  au moment de toucher le fond avec le couple de freinage  $C_F$  ?
  - En termes de sécurité, le maximum admis est de l'ordre de 6 à 7 m/s, faut-il considérer un système de freinage hydraulique supplémentaire ?





## Exercice 2 : Energétique

Pour effectuer quotidiennement un trajet Aller-Retour domicile-travail, on hésite entre deux modèles d'automobiles :

- 1) La berline Mercenault « L.A. Class' » de masse  $M_{Merco} = 1460 \text{ kg}$  à vide emportant 43 litres de carburant, Coefficient de traînée  $C_{X_{Merco}} = 0.22$ , défini en référence à sa surface frontale  $S_{REF_{Merco}} = 2.19 \text{ m}^2$ .
- 2) Le S.U.V. 2\*4 Climates « Buster » de 1320 kg à vide emportant 55 litres de carburant,  $C_{X_{Buster}} = 0.42$ , défini en référence à sa surface frontale  $S_{REF_{Buster}} = 2.42 \text{ m}^2$ .

Ces deux véhicules à traction avant sont équipés du même moteur Diesel (carburant de densité relative 0.8) délivrant 116 ch à 4000 tr/min et 260 Nm à 1750 tr/min.

Le véhicule transporte 250 kg de charge utile en moyenne (co-voiturage, effets personnels...).

				
		L.A. Class'	Buster	
Masse à vide	$M$	1460	1320	kg
Masse maxi	$M_{max}$		1840	kg
Charge utile	$C_U$	250		kg
Surface frontale	$S_{REF}$	2.19	2.42	$\text{m}^2$
Coefficient de traînée aéro.	$C_X$	0.22	0.42	N/A
Puissance maxi	$P_{MAX}$	85 à 4000 tr/min		kW
Couple maxi	$C_{MAX}$	260 à 1750 tr/min		N.m
Carburant	Gasoil	$\sigma = 0.8$		$\frac{\delta Q}{\delta m} = 42.10^6 \text{ J/kg}$
	Quantité	30 (/43 max)	30 (/55 max)	
Prix de vente / finition		31500 / « Colditz »	21500 / « Apparatchik »	€

On estime par ailleurs que le frottement « équivalent » par roulement est forfaitairement égal à 2,5 % du poids du véhicule (friction au niveau des organes de roulement), qu'il n'y a pas de pertes dans le reste de la transmission (boîte de vitesse etc.), ni par freinage (conduite « super-éco »).

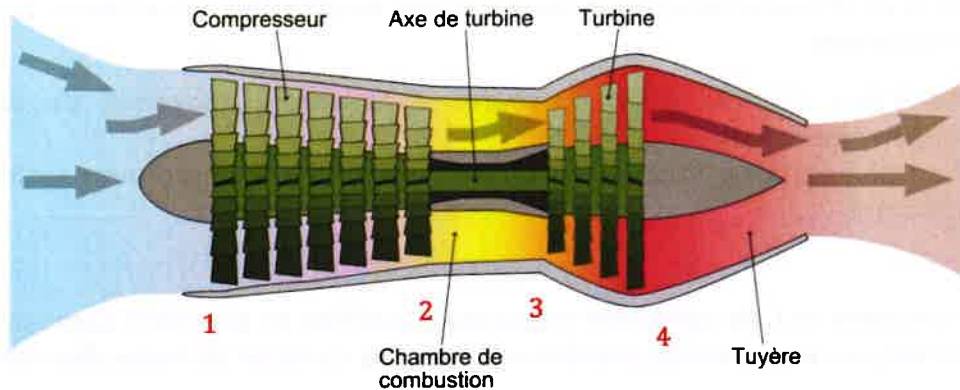
Les 40 km à vol d'oiseau séparant le lieu de travail au domicile se traduisent par deux parcours possibles :

- a) Au « plus court », 55 km parcourus à la vitesse moyenne de 36 km/h (départementales)
- b) Au « plus rapide », 70 km, impliquant un détour par l'autoroute sur 35 km à 108 km/h

- 1) On considère 30 L de carburant embarqués. Justifiez en première approximation qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte la variation de masse des véhicules.
- 2) Faites le bilan des forces extérieures (sur route plate) et représentez-le sur un dessin « lisible ».
- 3) Sur la journée [aller : a) – retour : b)], quel véhicule offre la moindre dépense énergétique ? On considèrera que la masse volumique de l'air est  $\rho = \rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$  pour le calcul de la traînée aérodynamique.
- 4) Sachant que le rendement thermomécanique est de 38% (l'énergie contenue dans 1 kg de carburant -42 MJ- n'est donc pas totalement récupérable), et en négligeant les autres pertes, quel véhicule conseilleriez-vous sur ce seul critère d'économie en carburant pour les deux parcours (a) et (b) ?
- 5) On prend pour hypothèse un prix moyen de 1.20 € le litre de carburant pour le calcul d'amortissement.
  - Effectuant 30 000 km/an, au bout de combien de temps atteint-on la même somme dépensée (véhicule + carburant seulement) dans chaque cas de parcours 100 % (a) ou 100% (b).
  - Financièrement, que recommanderiez-vous dans chacun de ces deux cas ?
  - Même question « au global » à 50% – 50% ?

### Exercice 3 : Thermodynamique

On considère un réacteur d'avion mono corps/mono flux :



Wikipédia

L'air sera considéré comme un gaz parfait, de capacité thermique à pression constante  $C_p = 1000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1,4$ , considérés constants.

On rappelle la définition des température et pression totales :

$$T_t = T_s \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

$$P_t = P_s \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Où  $T_s$  et  $P_s$  sont les température et pression statiques de l'air, et  $M = \frac{V}{\sqrt{\gamma r T_s}}$  est le nombre de Mach de l'écoulement de l'air, avec  $V$  sa vitesse.

On écrira la masse volumique de l'air :

$$\rho = \frac{P_s}{r T_s}$$

Avec  $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

La variation d'énergie par seconde d'une masse d'air  $\Delta H$  s'écrit via le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta H = D C_p \Delta T_t = Q + W$$

Avec :

- $D$  ( $\text{kg/s}$ ) le débit d'air dans le moteur.

- $Q$  ( $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$ ) la quantité de chaleur fournie (négative) ou reçue (positive) par la masse d'air considérée par seconde.

- $W$  ( $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$ ) le travail fourni (négatif) ou reçu (positif) par la masse d'air considérée par seconde.



Nous allons calculer la variation d'énergie  $\Delta H$  d'une masse d'air pendant une seconde, au cours de son passage par les différents étages du moteur : compresseur, chambre de combustion et turbine.

On se place dans le cas où notre avion vole à une vitesse de  $800 \text{ km/h}$ , et se situe à une altitude telle que  $P_s = 570 \text{ hPa}$  et  $T_s = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- 1) Calculez la pression totale  $P_{t1}$  de l'écoulement de l'air en entrée du moteur.
- 2) Calculez le débit d'air  $D$  passant dans le moteur par seconde, sachant que le diamètre de l'entrée d'air est  $d_{mot} = 0,75 \text{ m}$ .

### I- Compresseur

On considère que la compression est adiabatique réversible.

- 3) Calculez la température totale en sortie du compresseur  $T_{t2}$ , sachant que le rapport de compression vaut  $\pi_c = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = 5$ .
- 4) Calculez le travail  $W_c$  reçu par seconde par l'air au cours de la compression.

### II- Chambre de combustion

On considère la transformation à pression totale constante. L'énergie potentielle chimique contenue dans le carburant permet d'augmenter l'enthalpie de l'air suivant la relation :

$$\Delta H_{32} = C_i L$$

Avec :

- $C_i$  ( $\text{kg/s}$ ) le débit de carburant.

- $L = 10\,500 \text{ kcal/kg}$ , la quantité d'énergie récupérable par kilogramme de carburant brûlé.

On donne le débit total (air + carburant) dans la chambre de combustion  $D_3 = 1,02D$ .

On rappelle que  $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ .

- 5) Donnez la température totale en sortie de chambre  $T_{t3}$ .

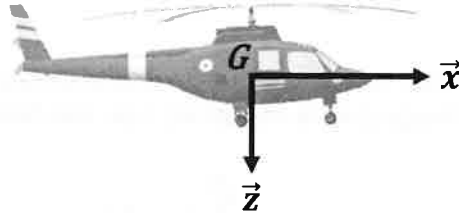
### III- Turbine

On considère une détente adiabatique réversible.

- 6) Sachant que tout le travail  $W_c$  que la masse d'air avait reçu du compresseur en un temps donné est entièrement redonné à la turbine pendant ce même temps, calculez la température totale en sortie de turbine  $T_{t4}$ .
- 7) Calculez le rapport de détente  $\pi_t = \frac{P_{t4}}{P_{t3}}$ .
- 8) Expliquez de manière très brève en quoi ces calculs représentent un cas idéal.

### Exercice 4 : Automatique

On se propose d'étudier le comportement d'un hélicoptère en longitudinal.



Les paramètres dont on va étudier l'évolution au cours du temps seront :

- $V$  : la vitesse d'avancement de l'hélicoptère
- $V_z$  : la vitesse verticale de l'hélicoptère
- $q$  : la vitesse de tangage du fuselage
- $\theta$  : l'assiette du fuselage

La seule variable de commande prise en compte sera  $D\delta m$  : la position du cyclique en longitudinal.

Le point de départ de notre étude est défini comme-suit :

$$\begin{aligned} V(t=0) &= V_{\acute{e}q} \\ V_z(t=0) &= 0 \\ q(t=0) &= 0 \\ \theta(t=0) &= 0 \\ D\delta m(t=0) &= D\delta m_{\acute{e}q} \end{aligned}$$

La variation de ces paramètres au cours du temps se détermine en écrivant le principe fondamental de la dynamique projeté suivant les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ , ainsi que le théorème du moment cinétique selon l'axe de tangage  $\vec{y}$ .

En considérant que la variation de chacun de ces paramètres par rapport au point d'équilibre reste faible, on peut linéariser les trois relations obtenues.

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V} &= F_V \Delta V + F_{V_z} V_z + F_q q + F_\theta \theta + F_{D\delta m} \Delta D\delta m \\ \dot{V}_z &= f_V \Delta V + f_{V_z} V_z + f_q q + f_{D\delta m} \Delta D\delta m \\ \dot{q} &= M_V \Delta V + M_{V_z} V_z + M_q q + M_{D\delta m} \Delta D\delta m \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned}$$

Avec  $\Delta V = V - V_{\acute{e}q}$  et  $\Delta D\delta m = D\delta m - D\delta m_{\acute{e}q}$ .

Que l'on peut écrire sous forme matricielle (cf [annexe 1](#) pour un rappel de la méthode de calcul matriciel) :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V} \\ \dot{V}_z \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_V & F_{V_z} & F_q & F_\theta \\ f_V & f_{V_z} & f_q & 0 \\ M_V & M_{V_z} & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V_z \\ q \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{D\delta m} \\ f_{D\delta m} \\ M_{D\delta m} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta D\delta m$$

Et que l'on note beaucoup plus simplement :

$$\dot{X} = A.X + B.U$$

Où les matrices  $A$  et  $B$  dépendent de la vitesse d'avancement.

- 1- Dites brièvement pourquoi, contrairement aux avions, il est primordial de distinguer les cas de vol stationnaire et vol d'avancement pour l'étude du comportement de l'hélicoptère.

Il s'agit donc de résoudre un système à quatre équations/quatre inconnues en posant  $\Delta D \delta m = 0$  (le pilote ne bouge pas le manche). Les solutions se mettent ainsi sous la forme :

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^n k_{\gamma j} e^{\lambda_j t}$$

Où  $\gamma$  représente un paramètre ( $\Delta V$ ,  $V_z$  etc.),  $n$  le nombre de paramètres, et  $\lambda_j$  les valeurs propres.

On remarque qu'il y a autant de valeurs propres que de paramètres.

Les valeurs propres peuvent être réelles ou complexes :

1-Dans le premier cas, on dit que la valeur propre est associée à un mode apériodique.

2-Dans le second cas, il y a forcément deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda_+ = -\xi \omega_n + i \omega_p \text{ et } \lambda_- = -\xi \omega_n - i \omega_p$$

Qui forment un mode périodique.

On appelle  $-\xi \omega_n$  l'amortissement,  $\xi$  l'amortissement réduit,  $\omega_n$  la pulsation naturelle et  $\omega_p$  la pulsation propre.

Finalement, suite à une perturbation qui déloge l'hélicoptère de son état d'équilibre, la variation de chaque paramètre par rapport à l'équilibre s'écrira sous la forme :

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{k_a} k_{\gamma j} e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^{k_p} k'_{\gamma j} e^{-\xi_j \omega_{n_j} t} \sin(\omega_{p_j} t + \varphi_{\gamma j})$$

Avec  $k_a$  le nombre de modes apériodiques (chacun associé à une valeur propre  $\lambda_j$ ), et  $k_p$  le nombre de modes périodiques (chacun étant associé à un couple de valeurs propres  $\lambda_{j\pm} = -\xi_j \omega_{n_j} \pm i \omega_{p_j}$ ).

Un mode est dit convergent si son expression tend vers 0 avec le temps ( $e^{\lambda_j t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ ) ou ( $e^{-\xi_j \omega_{n_j} t} \sin(\omega_{p_j} t + \varphi_{\gamma j}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ ), il est divergent sinon.

- 2- Au vu de la taille de notre système, combien de modes peut-il y avoir (détaillez les cas possibles) ?

### Partie A :

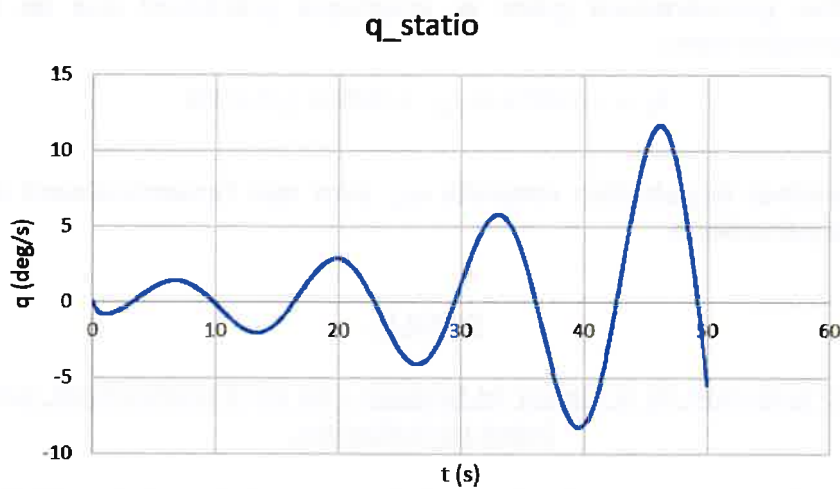
#### Etude de l'évolution de la vitesse de tangage $q$ en stationnaire, suite à une brève perturbation.

On fait l'hypothèse que la vitesse verticale  $V_z$  reste approximativement nulle. De plus on considère que le pilote ne bouge pas le manche ( $\Delta D\delta m = 0$ ).

Ainsi le système devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_V & F_q & F_\theta \\ M_V & M_q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ q \\ \theta \end{pmatrix}$$

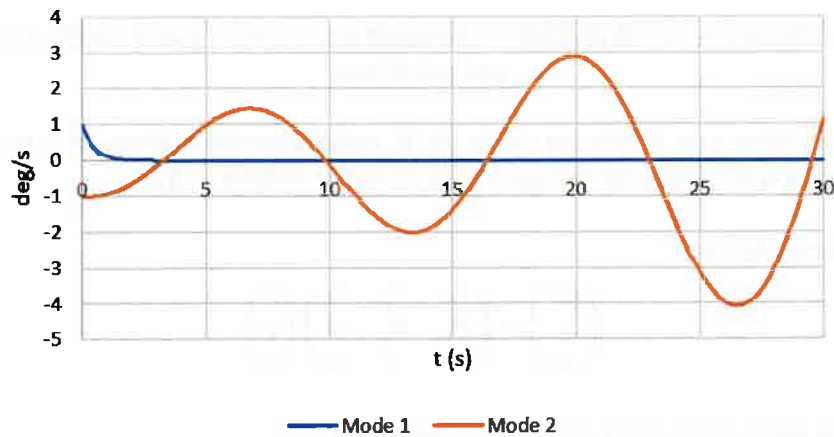
Sa résolution nous permet de trouver notamment  $q(t)$  :



- 3- En observant seulement l'évolution de  $q_{statior}$ , justifiez la nature de chacun des modes (apériodique/périodique et convergent/divergent).

On détaille plus précisément l'évolution de la vitesse de tangage, et l'influence de chacun des modes :

Influence des modes sur  $q_{\text{statio}}$



4- Justifiez grossièrement grâce au graphique précédent que les racines en stationnaire sont :

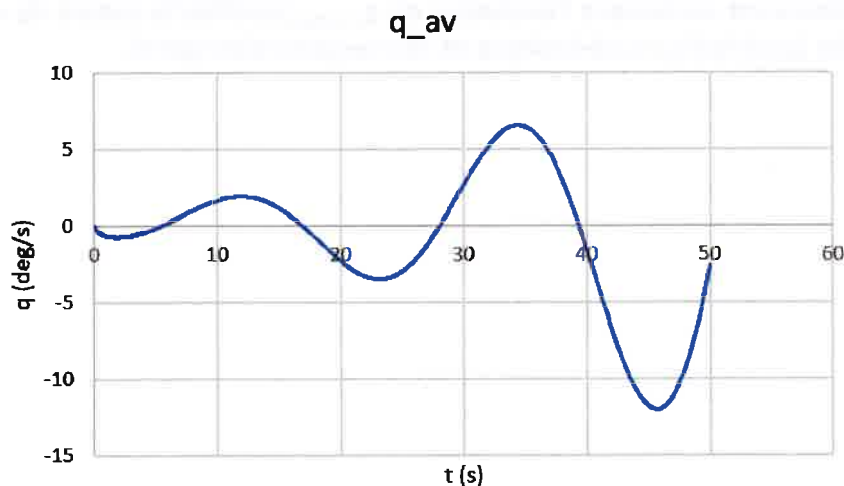
$$\lambda_1 = -2,0276 \text{ et } \lambda_{2\pm} = 0,0534 \pm 0,4790i$$

5- Déterminez la pulsation naturelle  $\omega_n$ , ainsi que l'amortissement réduit  $\xi$  du mode périodique.

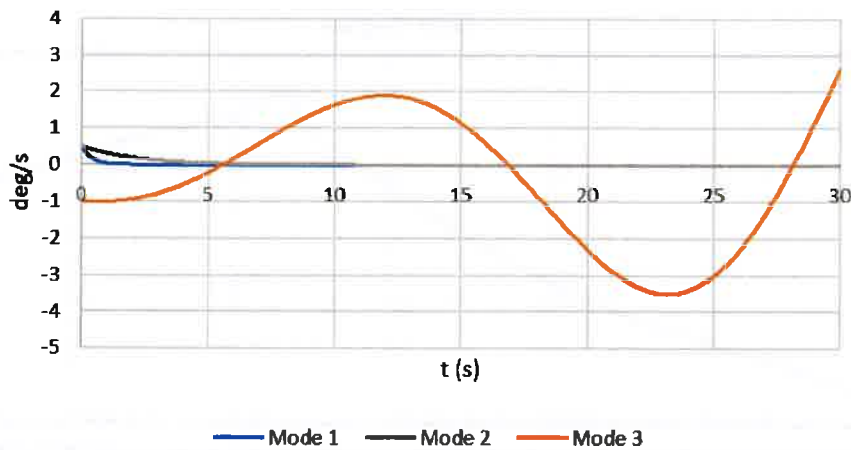
Partie B :

Etude de l'évolution de la vitesse de tangage  $q$  en vol d'avancement, suite à une brève perturbation.

La résolution du système complet (en tenant compte de la variation de  $V_z$  cette fois) nous permet de tracer  $q(t)$  :



### Influence des modes sur $q_{av}$



6- Dans quel cas (stationnaire/avancement) l'hélicoptère vous paraît plus simple à piloter ?

### Partie C :

Etude de la réponse en tangage  $q$  à une entrée au manche sinusoïdale.

On a les fonctions de transfert :

En stationnaire :

$$\frac{q}{\Delta D \delta m} = 26,4011 \frac{p^2 + 0,0084p}{p^3 + 1,9208p^2 + 0,0158p + 0,4716}$$

En vol d'avancement :

$$\frac{q}{\Delta D \delta m} = 27,6889 \frac{p^3 + 0,7256p^2 + 0,0126p}{p^4 + 2,9717p^3 + 0,9433p^2 + 0,2782p + 0,1886}$$

7- Exprimez le dénominateur de la fonction de transfert en stationnaire sous forme factorisée, c'est-à-dire d'un produit de polynômes de degré au plus 2.

On les diagrammes de Bode pour les cas du stationnaire et vol d'avancement :

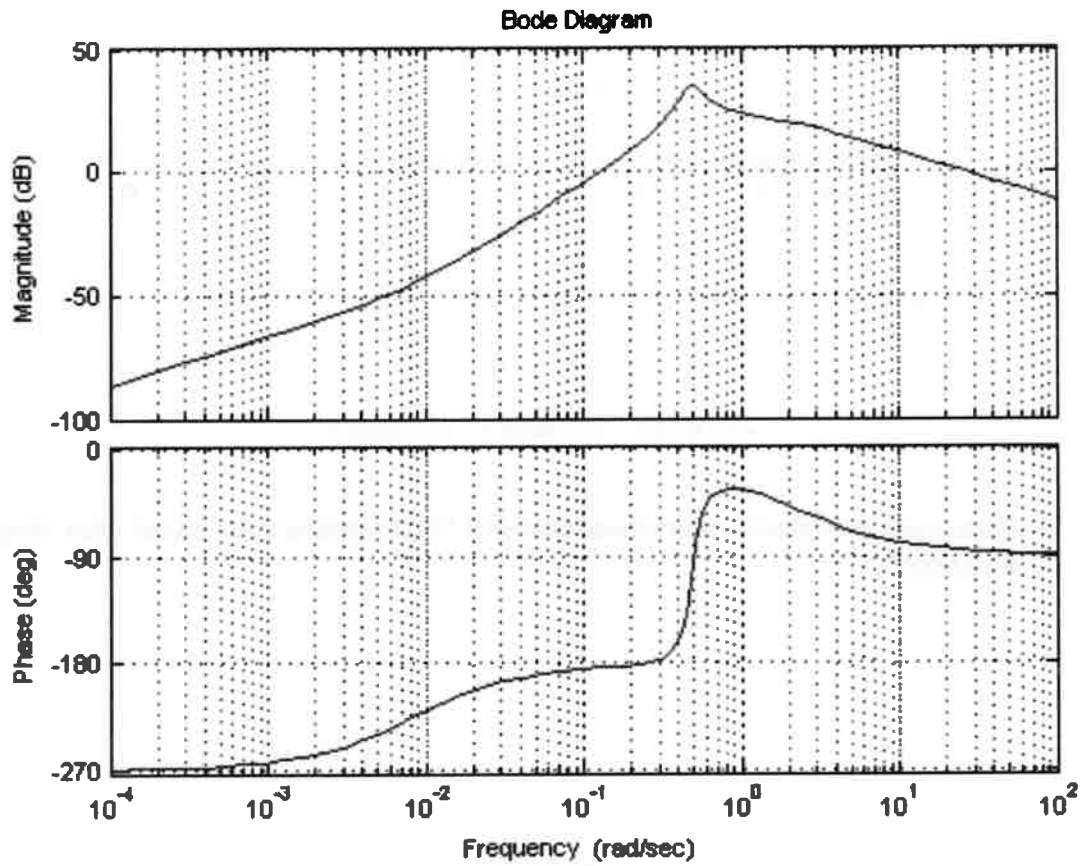


Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\frac{q}{\Delta D \delta m}$  en stationnaire



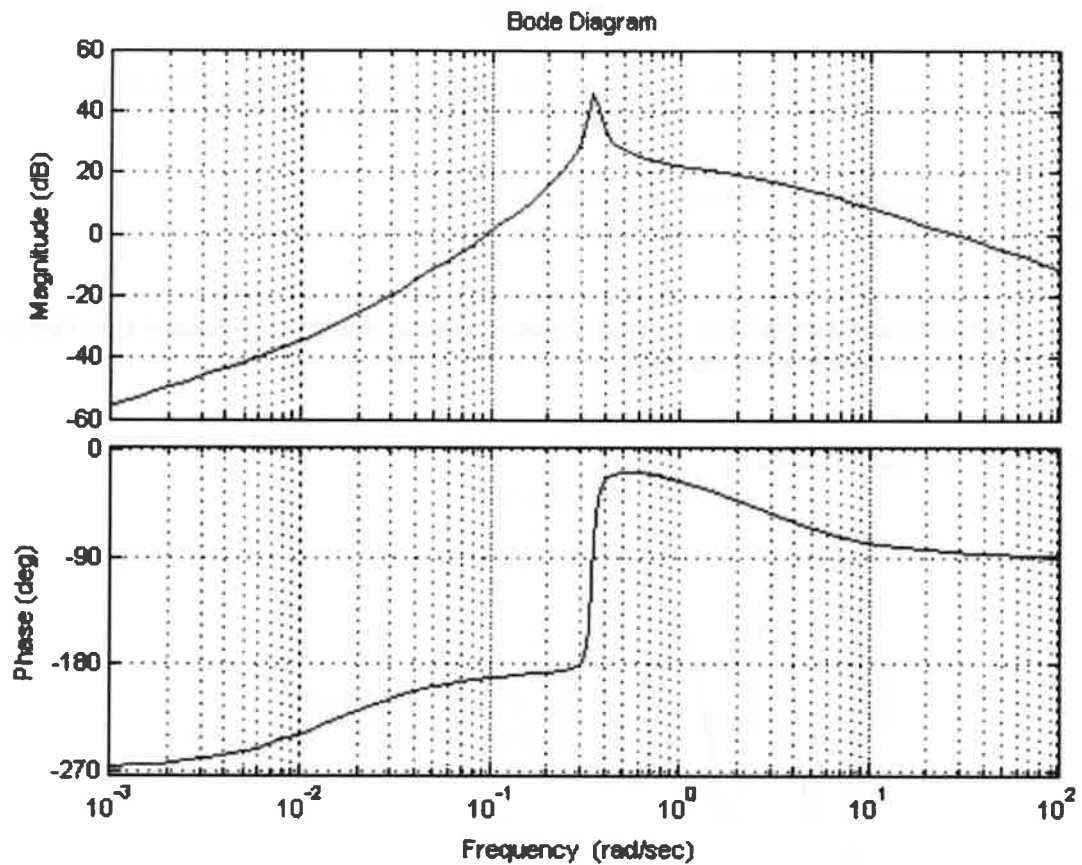


Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\frac{q}{\Delta D \delta m}$  en vol d'avancement

- 8- Déterminez les marges de gain pour les deux cas, et les représenter sur leur diagramme respectif. Commentaires ?
- 9- Donnez la pulsation de résonance dans les deux cas, et dites si cela risque d'être problématique au niveau du pilotage pour chacune des deux missions suivantes :
- a-Observation d'une zone restreinte (stationnaire)
  - b-Observation d'une zone immense (vol d'avancement)

### Partie D:

On cherche à corriger le mode périodique en stationnaire de sorte à obtenir :

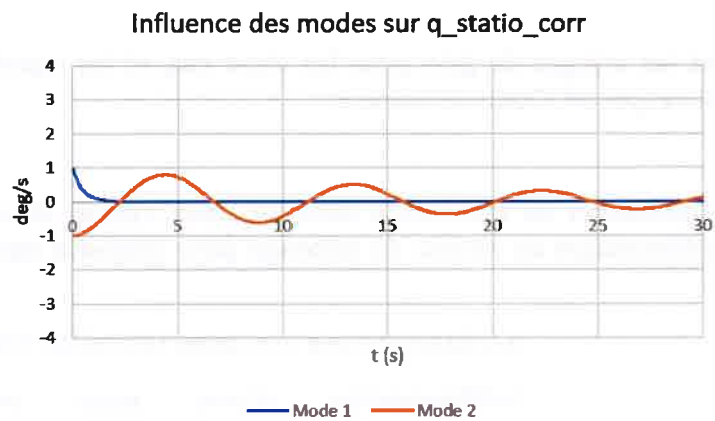
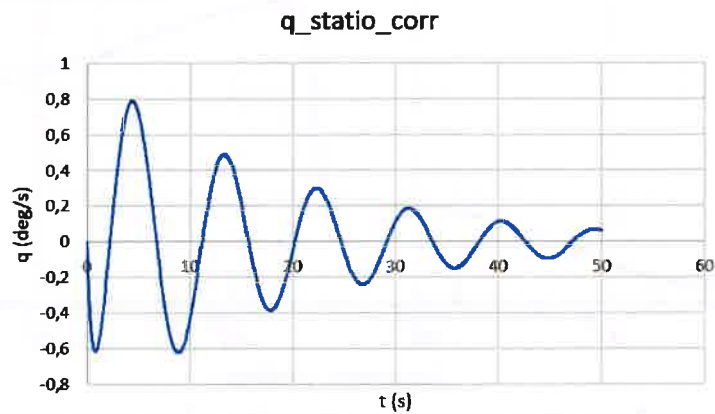
$$\lambda_1 = -2,0276 \text{ et } \lambda_{2\pm} = -0,0534 \pm 0,7i$$

Cela revient à trouver une certaine matrice  $K$  telle que :

$$\dot{X} = (A - BK).X + BU$$

**10- Dessinez le schéma bloc correspondant à cette équation, sachant que l'entrée du schéma est  $U$  et la sortie  $X$ .**

On obtient en stationnaire :



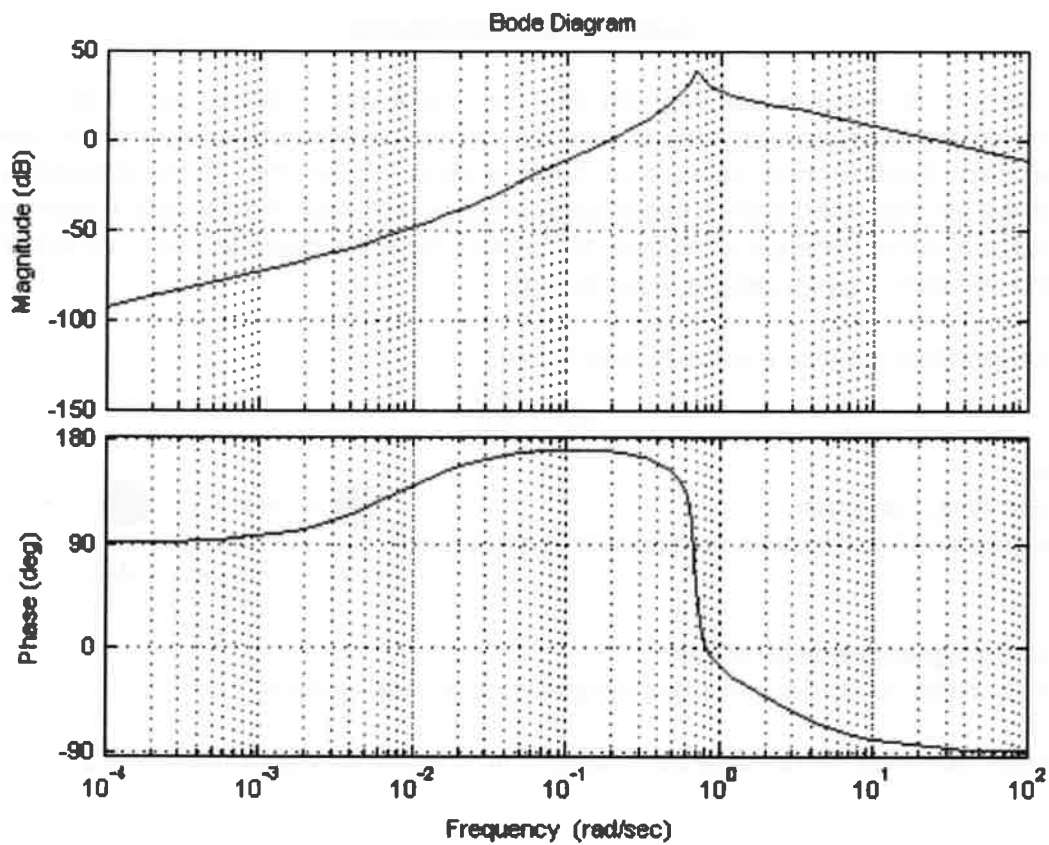


Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\frac{q}{\Delta D \delta m}$  corrigée en stationnaire

11- Quels sont les effets de cette correction ? Pensez-vous que le pilotage de l'hélicoptère est rendu plus simple avec cette correction ?

Annexe 1:

Le produit de deux matrices s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{pmatrix}$$

### Exercice 5 : Dimensions

On définit le nombre de Bagnold ( $Ba$ ) en rhéologie, « utilisé pour caractériser l'écoulement de grains de sable et permet surtout de déterminer à partir de quelles conditions l'écoulement passe d'un fluide à seuil à celui d'un fluide granulaire où l'énergie est dissipée par choc entre les grains et non plus par frottement. Il représente le rapport entre l'énergie cinétique dissipée et l'énergie dissipée par choc entre les grains de sable. » ([www.bonne-mesure.com](http://www.bonne-mesure.com)).

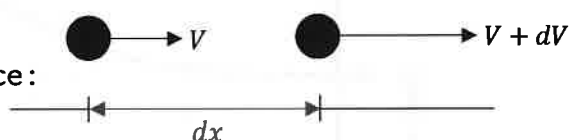
Son expression peut se mettre sous la forme :

$$Ba = \frac{m^a \gamma^b}{2L_c^c \mu}$$

Avec :

- $m$  la masse d'un grain

- $\gamma$  le gradient de vitesse en fonction de la distance :



- $L_c$  une longueur caractéristique

- $\mu$  la viscosité du fluide contenant les grains, exprimée en  $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$

Sachant que c'est un nombre sans dimension, donnez les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

**EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION**

**AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A**

**PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »**

**SESSION DU 16 NOVEMBRE 2020**

**CORRIGÉ ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES**

---

**Durée : 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée –  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur sujet**

**Document validé par :**

**Nom :**

**Date :**

**Signature :**

### Exercice 1 : 42500 tonnes de diplomatie

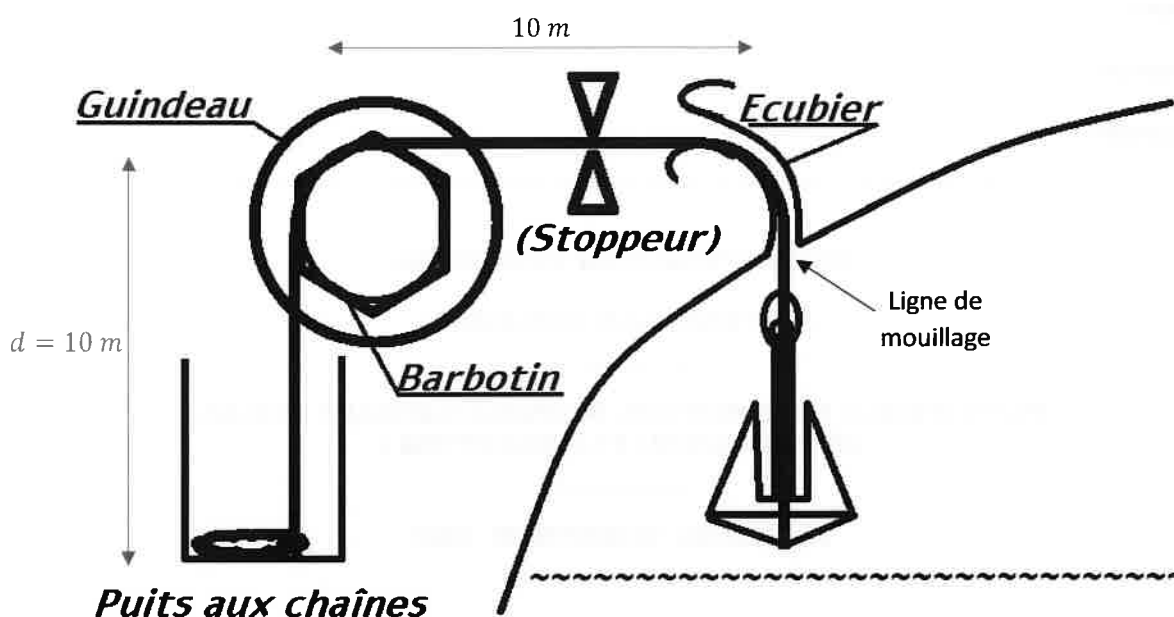
« On trouve plus d'avions au fond de la mer que de sous-marins dans le ciel »  
(A. Nonyme) ....

...et il y a au moins une chose que le porte-avions Charles-De-Gaulle peut y envoyer : ses ancres.

Le P.A. CDG dispose de deux lignes de mouillage en plage avant (une à tribord, une à bâbord), constituée comme ci :

Longueur de la ligne de mouillage :  $L = 320 \text{ m}$

Masse totale de ligne de mouillage :  $M = 80 \text{ tonnes}$  (dont 12 tonnes d'ancre)



En croisière, la ligne repose essentiellement dans le puits aux chaînes. En vue du mouillage, elle en est extraite par un moteur accouplé au guindeau, lequel peut également servir de frein pendant le déroulement. Les mailles de la ligne sont entraînées par le barbotin (donc sans glissement), solidaire du guindeau. Le stoppeur n'intervient pas dans la phase « active » du mouillage de l'ancre (déroulement continu).

On considère qu'en sortie d'écubier, l'ancre et sa ligne restent toujours parfaitement verticales, et qu'il n'y a pas de frottement dans l'écubier. Le fond du puits aux chaînes est estimé à une dizaine de mètres de la surface du pont où chemine la ligne jusqu'à l'écubier, également sur 10 m (on a bien 300 m de ligne effective depuis l'écubier quand tout est déroulé).

Enfin on nomme le rayon du barbotin  $R_B$ , et on négligera la traînée de l'ancre et de la ligne dans l'air ou dans l'eau.

- 1) Calculez la masse linéique  $m_L$  (kg/m) de la ligne de mouillage seule (sans compter l'ancre).

On cherche à calculer la masse par mètre de ligne, soit :

$$m_L = \frac{M_{\text{ligne}}}{L_{\text{ligne}}} = \frac{80\,000 - 12\,000}{320} = 212,5 \text{ kg/m}$$

- 2) Ancre en position haute, que se passe-t-il quand les mâchoires du stoppeur s'ouvrent, en l'absence de couple de freinage (le moteur n'exerce aucune résistance au mouvement de la ligne) ?

On s'intéresse au mouvement vertical de l'ancre qui résulte d'un « combat de poids » entre d'un côté l'ancre qui pèse 12 000 kg, et de l'autre  $d = 10 \text{ m}$  de ligne (entre le barbotin et le puits aux chaînes) qui pèse seulement :

$$d \cdot m_L = 10 \cdot 212,5 = 2125 \text{ kg}$$

L'ancre va donc se mettre à descendre.

- 3) On considère dans un premier temps une absence totale de freinage et d'inertie du guindeau/barbotin (accompagnement du mouvement), l'ancre tombe sans que la ligne de mouillage n'exerce de tension.

- a. Finalement, à quel mouvement simple peut-on assimiler la descente de l'ancre ?

Seul le poids s'exerce sur l'ancre, c'est le cas d'une chute libre.

- b. Donnez l'expression de la vitesse de descente de l'ancre, puis de la longueur de ligne déroulée  $l$  depuis l'écubier, en fonction du temps.

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au centre de gravité de l'ancre, projeté suivant l'axe vertical, on a :

$$M_{\text{ancre}} a = M_{\text{ancre}} g \rightarrow a = g$$

En intégrant cette relation entre le temps de départ où l'ancre se situe à l'écubier ( $t = 0 \text{ s}$  et  $V(t = 0) = 0 \text{ m/s}$ ), et un temps  $t$  quelconque on a :

$$V(t) = gt$$

Et en intégrant une seconde fois, en prenant  $l(t = 0) = 0 \text{ m}$  :

$$l(t) = \frac{gt^2}{2}$$

- c. En déduire la vitesse de déroulement  $\omega$  de la ligne, en fonction de la longueur de la ligne déroulée  $l$  et de  $R_B$ .

La relation qui lie toutes les variables de la question est :

$$V(t) = R_B \omega(t) = gt$$

Or on a vu à la question précédente que :

$$l(t) = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Alors :

$$R_B \omega(t) = g \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Donc :

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{l(t)}$$

- d. Donnez l'expression de  $\frac{d\omega}{dt}$ .

En réutilisant l'expression de la trouvée à la question précédente, on a :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \frac{d[\sqrt{l(t)}]}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \frac{d\left[\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right]}{dt} = \frac{g}{R_B}$$

- e. Calculez les vitesses angulaire  $\omega_{MAX}$  (en  $rad/s$  et  $tr/min$ ) et linéaire  $v_{MAX}$  (en  $m/s$ ) au moment où la ligne est complètement déroulée pour  $R_B = 2,5m$ .

Lorsque la ligne est complètement déroulée on a :

$$l(t) = 300 \text{ m}$$

Ce qui donne les vitesses :

$$\omega_{MAX} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{l(t)} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{300} = 30,69 \text{ rad/s}$$

Et :

$$v_{MAX} = R_B \omega_{MAX} = 76,73 \text{ m/s}$$

- f. Calculez la vitesse angulaire  $\omega_{1/2}$  à la moitié du déroulement ( $l = 150 \text{ m}$ ).

De même, au moment où la moitié de la ligne est déroulée :

$$\omega_{1/2} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{l(t)} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{150} = 21,7 \text{ rad/s}$$



4) On considère maintenant un nouveau système de freinage électromagnétique (par courants de Foucault) tel que le couple de freinage soit  $C_F = -K_F \omega$ .

- a. Ecrire l'équation du mouvement en fonction de  $\omega$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $R_B$ ,  $m_L$ , de la masse de l'ancre, de la longueur de ligne depuis l'écubier  $l$ , de la distance entre Guindeau et puits aux chaînes (10 m) et du moment d'inertie du guindeau/barbotin  $J_{GB}$ .

On a le Théorème du Moment Cinétique (TMC) appliqué au centre de l'ensemble guindeau/barbotin, suivant son axe de rotation :

$$J_{GB} \frac{d\omega}{dt} = M_{ancre} g R_B + m_L l g R_B - 10 m_L g R_B - K_F \omega$$

$$J_{GB} \frac{d\omega}{dt} = M_{ancre} g R_B + m_L g R_B (l - 10) - K_F \omega$$

En effet d'une part :

-L'ancre génère un moment positif (qui va dans le sens d'une augmentation de la vitesse de rotation  $\omega$ ) :  $M_{ancre} g R_B$

-La portion de ligne de mouillage située entre l'écubier et l'ancre  $l$  génère un moment positif :  $m_L l g R_B$

Et d'autre part :

-La portion de ligne de mouillage située entre le barbotin et le puits aux chaînes (10 m) génère un moment négatif (qui va dans le sens d'une diminution de la vitesse de rotation  $\omega$ ) :  $-10 m_L g R_B$

-Le frein électromagnétique génère un couple négatif :  $-K_F \omega$ .

- b. Posant  $J_{GB} = 0$  calculez  $K_F$  en donnant ses unités, pour que le couple de freinage s'oppose aux forces provoquant le mouvement à la moitié du déroulement.

On reprend la relation obtenue via le TMC à la question précédente, en prenant  $l = 150 \text{ m}$  :

$$0 = M_{ancre} g R_B + m_L g R_B (150 - 10) - K_F \omega_{1/2}$$

Soit :

$$K_F = \frac{M_{ancre} g R_B + m_L g R_B 140}{\omega_{1/2}} = 47\,186 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

L'unité de  $K_F$  est  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  puisqu'il s'agit d'un moment ( $\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ) divisé par une vitesse de rotation ( $\text{s}^{-1}$ ).

- c. Justifiez l'hypothèse précédente en calculant  $J_{GB}$  (et en précisant ses unités) que l'on assimilera à un cylindre plein de masse  $M_B = 5 \text{ t}$  et de Rayon  $R_B = 2.5 \text{ m}$ , puis en calculant le terme  $J_{GB} \frac{d\omega}{dt}$  dans le pire cas possible (c'est-à-dire sans freinage électromagnétique).

On a le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe qui s'écrit :

$$J_{GB} = \frac{M_B R_B^2}{2} = \frac{5\,000 \cdot 2,5^2}{2} = 15\,626 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ainsi on a, sans freinage électromagnétique (reprendre le résultat de la question 3).d) :

$$J_{GB} \frac{d\omega}{dt} = 15\,626 \cdot \frac{g}{R_B} = 61\,316 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Cette valeur est surestimée puisqu'elle serait plus faible dans le cas avec freinage électromagnétique, la variation de vitesse  $\omega$  étant plus faible.

Sachant que les autres termes dans la relation obtenue via le TMC vu à la question 4).a) ont pour valeur :

$$M_{\text{ancree}} g R_B = 294\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$m_L g R_B 140 = 729\,619 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$K_F \omega_{1/2} = 1\,023\,919 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Si l'on écrit :

$$J_{GB} \frac{d\omega}{dt} + K_F \omega_{1/2} = M_{\text{ancree}} g R_B + m_L g R_B 140$$

On voit que le terme  $J_{GB} \frac{d\omega}{dt}$  est beaucoup plus faible que  $K_F \omega_{1/2}$ . On peut donc le négliger et écrire :

$$K_F \omega_{1/2} \approx M_{\text{ancree}} g R_B + m_L g R_B 140$$

- d. Le navire au mouillage a sa ligne tendue, qui doit être assez longue pour que l'ancre soit bien horizontale. La longueur de ligne dans l'eau doit être égale à 7 fois la hauteur entre l'écubier (10 m au-dessus de l'eau environ) et le fond de la mer.

- i. Jusqu'à quelle profondeur peut-on utiliser l'ancre du bateau ?

La longueur de ligne dans l'eau est  $l - 10$ . Lorsque la ligne est complètement déroulée, la portion dans l'eau est de 290 m.

La distance entre l'écubier et le fond marin  $h$  se calcule donc de la manière suivante :

$$l - 10 = 7h \rightarrow h = \frac{l - 10}{7}$$

Soit :

$$h = \frac{300 - 10}{7} = 41,4 \text{ m}$$

Et la profondeur est  $p = h - 10 = 31,4 \text{ m}$ .

- ii. Quelle est la vitesse angulaire  $\omega$  au moment de toucher le fond sans couple de freinage ?

Au moment où l'ancre touche le fond suite au déroulement de la ligne, cette dernière est déroulée de 41,4 m.

On reprend alors la réponse de la question 3).c pour trouver  $\omega$  :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{h} = \frac{\sqrt{2g}}{R_B} \cdot \sqrt{41,4} = 11,4 \text{ rad/s}$$

- iii. Quelle est la vitesse angulaire  $\omega$  au moment de toucher le fond avec couple de freinage ?

On reprend l'équation du TMC simplifiée établie à la question 4).c :

$$K_F \omega \approx M_{\text{ancre}} g R_B + m_L g R_B (l - 10)$$

Soit avec  $\omega = \omega_2$  et  $l = 41,4 \text{ m}$  :

$$\omega_2 = \frac{M_{\text{ancre}} g R_B + m_L g R_B (41,4 - 10)}{K_F} = 9,7 \text{ rad/s}$$

On remarque que le couple de freinage permet de réduire un peu la vitesse de rotation du barbotin, et donc la vitesse de descente de l'ancre.

- iv. En déduire la vitesse linéaire dans les deux cas ?

On a :

$$\begin{aligned} v_1 &= R_B \omega_1 = 11,4 \cdot 2,5 = 28,5 \text{ m/s} \\ v_2 &= R_B \omega_2 = 9,7 \cdot 2,5 = 24,3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

- v. En termes de sécurité, le maximum admis est de l'ordre de 6 à 7 m/s, faut-il considérer un système de freinage hydraulique supplémentaire ?

Il ne faut pas oublier que l'on a omis la traînée hydrodynamique de l'ancre, qui va en réalité freiner un peu plus l'ancre lors de la descente. Mais étant donné les valeurs de vitesse de chute calculées précédemment, cela ne paraît toutefois pas suffisant pour freiner l'ancre.



## Exercice 2 : Energétique

Pour effectuer quotidiennement un trajet Aller-Retour domicile-travail, on hésite entre deux modèles d'automobiles :

- 1) La berline Mercenault « L.A. Class' » de masse  $M_{Merco} = 1460 \text{ kg}$  à vide emportant 43 litres de carburant, Coefficient de traînée  $C_{X_{Merco}} = 0.22$ , défini en référence à sa surface frontale  $S_{REF_{Merco}} = 2.19 \text{ m}^2$ .
- 2) Le S.U.V. 2\*4 Climates « Buster » de 1320 kg à vide emportant 55 litres de carburant,  $C_{X_{Buster}} = 0.42$ , défini en référence à sa surface frontale  $S_{REF_{Buster}} = 2.42 \text{ m}^2$ .

Ces deux véhicules à traction avant sont équipés du même moteur Diesel (carburant de densité relative 0.8) délivrant 116 ch à 4000 tr/min et 260 Nm à 1750 tr/min.

Le véhicule transporte 250 kg de charge utile en moyenne (co-voiturage, effets personnels...).

				
		L.A. Class'	Buster	
Masse à vide	$M$	1460	1320	kg
Masse maxi	$M_{max}$		1840	kg
Charge utile	$C_U$	250		kg
Surface frontale	$S_{REF}$	2.19	2.42	$\text{m}^2$
Coefficient de traînée aéro.	$C_X$	0.22	0.42	N/A
Puissance maxi	$P_{MAX}$	85 à 4000 tr/min		kW
Couple maxi	$C_{MAX}$	260 à 1750 tr/min		N.m
Carburant	Gasoil	$\sigma = 0.8$	$\frac{\delta Q}{\delta m} = 42.10^6 \text{ J/kg}$	
	Quantité	30 (/43 max)	30 (/55 max)	l
Prix de vente / finition		31500 / « Colditz »	21500 / « Apparatchik »	€

On estime par ailleurs que le frottement « équivalent » par roulement est forfaitairement égal à 2,5 % du poids du véhicule (friction au niveau des organes de roulement), qu'il n'y a pas de pertes dans le reste de la transmission (boîte de vitesse etc.), ni par freinage (conduite « super-éco »).

Les 40 km à vols d'oiseau se traduisent par deux parcours possibles :

- Au « plus court », 55 km parcourus à la vitesse moyenne de 36 km/h (départementales)
- Au « plus rapide », 70 km, impliquant un détour par l'autoroute sur 35 km à 108 km/h

1) On considère 30 L de carburant embarqués. Justifiez en première approximation qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte la variation de masse des véhicules.

On a :

-Pour la première voiture :

$$\frac{m_{voiture} + C_U + m_{carbu}}{m_{voiture} + C_U} = \frac{1460 + 250 + 30 \cdot 0,8}{1460 + 250} = 1,014$$

La différence de masse représente 1,4%.

-Pour la seconde voiture :

$$\frac{m_{voiture} + C_U + m_{carbu}}{m_{voiture} + C_U} = \frac{1320 + 250 + 30 \cdot 0,8}{1320 + 250} = 1,015$$

La différence de masse représente 1,5%.

Le pourcentage de différence est très faible dans les deux cas, ce qui justifie le fait de négliger le poids du carburant dans notre étude.

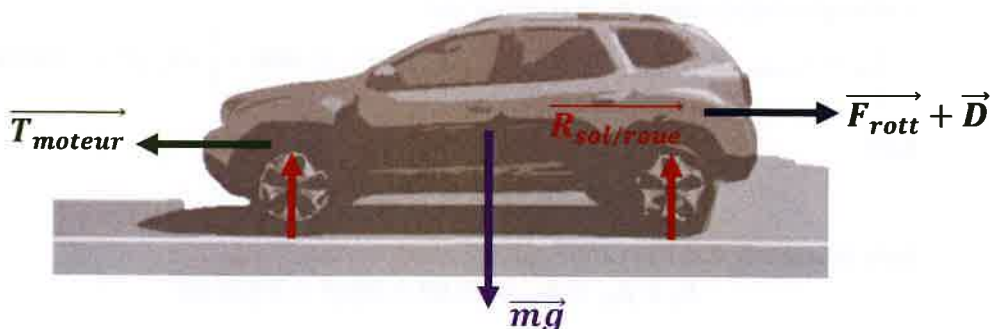
2) Faites le bilan des forces extérieures (sur route plate) et représentez-le sur un dessin « lisible ».

On a :

-Suivant l'axe vertical :  $\overline{mg} + \overline{R_{sol}} = \vec{0}$

Où  $\overline{R_{sol}}$  représente la somme de la réaction du sol sur chaque roue ( $\overline{R_{sol/roue}}$ ) de la voiture.

-Suivant l'axe horizontal :  $\overline{F_{rott}} + \overline{D} = \overline{T_{moteur}}$



- 3) Sur la journée (aller-retour), quel véhicule offre la moindre dépense énergétique ?  
On considèrera que la masse volumique de l'air est  $\rho = \rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$  pour le calcul de la traînée aérodynamique.

On s'intéresse ici à l'énergie qu'il faut dépenser pour déplacer le véhicule d'un point A à un point B séparés d'une distance  $d$ .

Il s'agit en fait de savoir quelle quantité d'énergie potentielle (contenue dans le carburant) a été « utilisée » pour faire avancer le véhicule :

$$\Delta E = E_{potA} - E_{potB}$$

Pour cela il faut considérer le travail de la traction générée par le moteur sur cette distance :

$$T_{moteur}d = \Delta E$$

Or on considère des trajets pendant lesquels le véhicule a une vitesse constante, le bilan des forces projeté suivant l'axe horizontal nous indique alors que :

$$T_{moteur} = F_{rott} + D = 0,025 \cdot mg + \frac{1}{2} \rho S_{REF} V^2 C_X$$

Procédons par voiture, et afin d'être le plus juste possible, considérons un aller par le parcours a) et un retour par le parcours b) :

#### 1- LA CLASS :

a) **Aller** (55 km parcourus à la vitesse moyenne de 36 km/h) :

L'énergie dépensée par le moteur est :

$$E_{1a} = T_{moteur}d = (F_{rott} + D)d = \left(0,025 \cdot mg + \frac{1}{2} \rho S_{REF} V^2 C_X\right) d$$

Soit :

$$E_{1a} = \left(0,025 \cdot (1460 + 250) \cdot 9,81 + \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 2,19 \cdot 10^2 \cdot 0,22\right) 55\,000 = 24,68 \text{ MJ}$$

Note : la vitesse dans l'expression de la traînée est exprimée en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

b) **Retour** (35 km parcourus à la vitesse moyenne de 36 km/h et 35 km parcourus à la vitesse moyenne de 108 km/h) :

L'énergie dépensée par le moteur est :

$$E_{1b} = T_{moteur}d = F_{rott} \cdot 70\,000 + \frac{1}{2} \rho S_{ref} V_1^2 C_X \cdot 35\,000 + \frac{1}{2} \rho S_{ref} V_2^2 C_X \cdot 35\,000$$

Soit :

$$E_{1b} = 39,67 \text{ MJ}$$

Soit finalement sur un aller-retour a)-b), on a :

$$E_1 = E_{1a} + E_{1b} = 24,68 + 39,67 = 64,37 \text{ MJ}$$

2- Buster :

a) De la même manière que pour la LA CLASS, l'énergie dépensée par le moteur à l'aller est :

$$E_{2a} = 24,6 \text{ MJ}$$

b) Pour le retour :

$$E_{2b} = 48,74 \text{ MJ}$$

Soit finalement sur un aller-retour a)-b) :

$$E_2 = E_{2a} + E_{2b} = 24,6 + 48,74 = 73,34 \text{ MJ}$$

Sur le trajet a), la vitesse du véhicule n'est pas suffisamment significative pour permettre de départager les deux voitures sur leur qualité aérodynamique (pour laquelle la LA CLASS est bien meilleure que le Buster).

C'est plutôt le poids qui fait la « différence » puisque la LA CLASS est plus lourde que le Buster, et demande ainsi une énergie supérieure du fait des frottements plus importants ( $F_{\text{rott}} = 0,025 \cdot mg$ ).

Sur le trajet b) en revanche, c'est bel et bien l'effet aérodynamique qui l'emporte et permet à la LA CLASS de moins demander d'énergie puisque  $C_{X_{\text{Merco}}} S_{\text{REF}_{\text{Merco}}} = 0,48 \text{ m}^2$ , contre  $1,02 \text{ m}^2$  pour le Buster.

En conclusion, en considérant de manière impartiale un aller a) et un retour b) sur une journée, il apparaît que Le Buster demande plus d'énergie que la LA CLASS.

4) Sachant que le rendement thermomécanique est de 38% (l'énergie contenue dans 1 kg de carburant -42 MJ- n'est donc pas totalement récupérable), et en négligeant les autres pertes, quel véhicule conseilleriez-vous sur ce seul critère d'économie en carburant pour les deux parcours (a) et (b) ?

A la question précédente nous avons raisonné en termes d'énergie, désormais on s'intéresse à la consommation de carburant des deux véhicules. Le lien entre énergie et quantité de carburant est donné dans l'énoncé.

D'une masse  $m_{\text{carbu}}$  (en kg) de carburant on peut « utiliser » l'énergie (en J) pour faire avancer le véhicule :

$$E_{\text{recup}} = \left( 38\% \cdot \frac{\delta Q}{\delta m} \right) m_{\text{carbu}} = (0,38 \cdot 42 \cdot 10^6) m_{\text{carbu}} = 15,96 \cdot 10^6 \cdot m_{\text{carbu}} \text{ J}$$

Ou plus simplement en exprimant l'énergie en MégaJoule :

$$E_{\text{recup}} = 15,96 \cdot m_{\text{carbu}} \text{ MJ}$$

Calculons maintenant la consommation (en L) de chaque voiture sur les différents trajets, en reprenant les résultats trouvés à la question précédente.

Sur un trajet, il faut que l'énergie demandée soit égale à l'énergie récupérée du carburant :

$$E_{dem} = E_{recup} = 15,96 \cdot m_{carbu}$$

Or la consommation de carburant est :

$$Conso = \frac{m_{carbu}}{\sigma}$$

Puisque la densité du carburant est  $\sigma = \frac{\rho_{carbu}}{\rho_{eau}} = 0,8$ , un litre de carburant pèse 0,8 kg.

Pour le dire autrement, une masse de carburant  $m_{carbu}$  représente  $\frac{m_{carbu}}{\sigma}$  litres.

Finalement, la consommation s'écrit :

$$Conso = \frac{E_{dem}}{15,96 \cdot \sigma}$$

-Pour la voiture LA CLASS, durant le trajet a) on a une consommation de :

$$Conso_{1a} = \frac{E_{1a}}{15,96 \cdot \sigma} = \frac{24,68}{15,96 \cdot 0,8} = 1,934 L$$

Et pour le trajet b) :

$$Conso_{1b} = \frac{E_{1b}}{15,96 \cdot \sigma} = \frac{39,67}{15,96 \cdot 0,8} = 3,12 L$$

Donc :

$$Conso_1 = Conso_{1a} + Conso_{1b} = 5,05 L$$

-Pour la voiture Buster, on a :

$$Conso_{2a} = 1,927 L$$

$$Conso_{2b} = 3,82 L$$

$$Conso_2 = 5,75 L$$

On retrouve bien les mêmes conclusions qu'à la question précédente. Sur le trajet a), la vitesse du véhicule est relativement faible, la traînée n'est pas très importante et la bonne aérodynamique de la LA CLASS ne se ressent pas. C'est le poids du Buster qui donne un léger avantage à ce dernier.

En revanche, sur le trajet b), la vitesse est plus importante, et le terme de traînée devient conséquent. C'est la raison pour laquelle le Buster consomme plus.



- 5) On prend pour hypothèse un prix moyen de 1.20 € le litre de carburant pour le calcul d'amortissement.
- Effectuant 30 000 km/an, au bout de combien de temps atteint-on la même somme dépensée (véhicule + carburant seulement) dans chaque cas de parcours 100 % (a) ou 100% (b) ?
  - Financièrement, que recommanderiez-vous dans chacun de ces deux cas ?
  - Même question « au global » à 50% – 50% ?

On cherche un nombre d'années  $X$  à partir duquel le prix des deux voitures est équivalent.

Pour chaque type de trajet, on écrit que :

$$Prix_{LA CLASS} + X \cdot Prix_{carbu LA CLASS/an} = Prix_{Buster} + X \cdot Prix_{carbu Buster/an}$$

$$Prix_{LA CLASS} + X \cdot Conso_{LA CLASS/an} \cdot Prix_{carbu/L} = Prix_{Buster} + X \cdot Conso_{Buster/an} \cdot Prix_{carbu/L}$$

Ce qui donne le nombre d'années :

$$X = \frac{Prix_{Buster} - Prix_{LA CLASS}}{Prix_{carbu/L} [Conso_{LA CLASS/an} - Conso_{Buster/an}]}$$

Concernant le trajet a) :

-Pour la LA CLASS :

$Conso_{1a} = 1,934 L$  pour 55 km soit donc pour 30 000 km :

$$Conso_{1a} \frac{30\,000}{55} = 1054,72 L = Conso_{LA CLASS/an}$$

Et le prix du carburant à l'année est  $1054,72 \cdot 1,20 = 1265,67$  €.

-Pour le Buster :

$$Conso_{2a} \frac{30\,000}{55} = 1050,98 L = Conso_{Buster/an}$$

Et le prix du carburant à l'année est  $1050,98 \cdot 1,20 = 1261,18$  €.

Ainsi :

$$X_a = \frac{21\,500 - 31\,500}{1265,67 - 1261,18} = -2229 \text{ années}$$

Pour le seul trajet a), la LA CLASS coutera toujours plus chère que le Buster puisqu'elle consomme plus et a un prix d'achat supérieur au Buster.

Concernant le trajet b) :

$$Conso_{LA\ CLASS/an} = 1332,07\ L/an$$

Et le prix du carburant à l'année est  $1332,07 \cdot 1,20 = 1598,48\ \text{€}$ .

$$Conso_{Buster/an} = 1636,08\ L/an$$

Et le prix du carburant à l'année est  $1636,08 \cdot 1,20 = 1963,30\ \text{€}$ .

Ainsi :

$$X_b = 27,4\ \text{années}$$

Pour le seul trajet b), la LA CLASS reviendra au même prix que le Buster au bout de plus de 27 ans.

Concernant une combinaison trajets a)-b) :

$$Conso_{LA\ CLASS/an} = 1210,03\ L/an$$

Et le prix du carburant à l'année est  $1210,03 \cdot 1,20 = 1452,04\ \text{€}$ .

$$Conso_{Buster/an} = 1378,64\ L/an$$

Et le prix du carburant à l'année est  $1378,64 \cdot 1,20 = 1654,36\ \text{€}$ .

Ainsi :

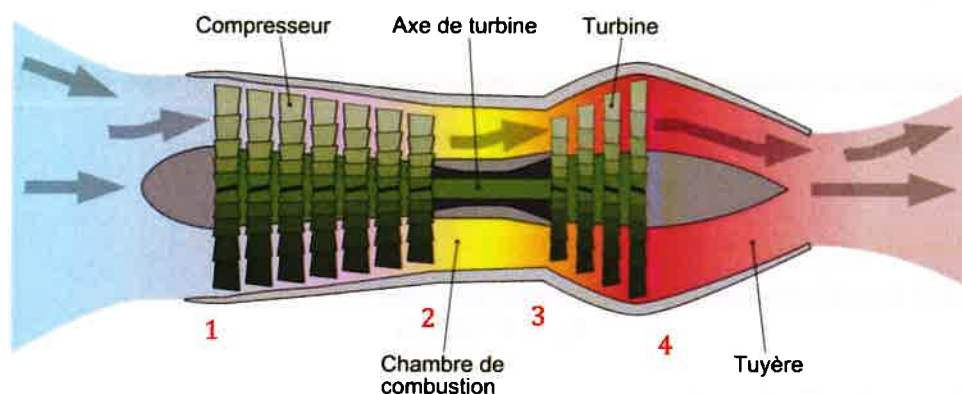
$$X_{ab} = 49,4\ \text{années}$$

Pour la combinaison trajets a)-b), la LA CLASS reviendra au même prix que le Buster au bout de 49 ans.

Finalement, pour ces types de trajet, le Buster reste le plus avantageux, à moins d'avoir l'habitude de conserver sa voiture très longtemps...

### Exercice 3 : Thermodynamique

On considère un réacteur d'avion mono corps/mono flux :



Wikipédia

L'air sera considéré comme un gaz parfait, de capacité thermique à pression constante  $C_p = 1000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1,4$ , considérés constants.

On rappelle la définition des température et pression totales :

$$T_t = T_s \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = T_s + \frac{V^2}{2C_p}$$

$$P_t = P_s \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Où  $T_s$  et  $P_s$  sont les température et pression statiques de l'air, et  $M = \frac{V}{\sqrt{\gamma r T_s}}$  est le nombre de Mach de l'écoulement de l'air, avec  $V$  sa vitesse.

On écrira la masse volumique de l'air :

$$\rho = \frac{P_s}{r T_s}$$

Avec  $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

La variation d'énergie par seconde d'une masse d'air s'écrit via le premier principe de la thermodynamique avec l'enthalpie  $H$  :

$$\Delta H = DC_p \Delta T_t = Q + W$$

Avec :

- $D$  ( $\text{kg/s}$ ) le débit d'air dans le moteur.

- $Q$  ( $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$ ) la quantité de chaleur fournie (négative) ou reçue (positive) par la masse d'air considérée par seconde.

$-W$  ( $J \cdot s^{-1}$ ) le travail fourni (négatif) ou reçu (positif) par la masse d'air considérée par seconde.

Nous allons calculer la variation d'énergie  $\Delta H$  d'une masse d'air pendant une seconde, au cours de son passage par les différents étages du moteur : compresseur, chambre de combustion et turbine.

On se place dans le cas où notre avion vole à une vitesse de  $800 \text{ km/h}$ , et se situe à une altitude telle que  $P_s = 570 \text{ hPa}$  et  $T_s = -15^\circ\text{C}$ .

1) Calculez la pression totale  $P_{t1}$  de l'écoulement de l'air en entrée du moteur.

On utilise la formule de la pression totale donnée dans l'énoncé :

$$P_{t1} = P_{s1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

En sachant que d'une part la pression statique vaut :

$$P_{s1} = 57\,000 \text{ Pa}$$

Et d'autre part le Mach vaut :

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma r T_s}} = \frac{800/3,6}{\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (273,15 - 15)}} = 0,69$$

Avec la vitesse de l'avion exprimée en  $m \cdot s^{-1}$  et la température statique en  $K$ .

Ainsi on trouve :

$$P_{t1} = 78\,366 \text{ Pa} = 783,7 \text{ hPa}$$

2) Calculez le débit d'air  $D$  passant dans le moteur par seconde, sachant que le diamètre de l'entrée d'air est  $d_{mot} = 0,75 \text{ m}$ .

On a le débit d'air traversant une section de surface  $S$  à une vitesse  $V$ , qui s'écrit :

$$D = \rho S V$$

Et qui s'exprime en  $kg/s$ .

Or ici nous avons :

$$\rho = \rho_1 = \frac{P_{s1}}{r T_{s1}} = \frac{57\,000}{287 \cdot (273,15 - 15)} = 0,769 \text{ kg/m}^3$$

Et :

$$S = \frac{\pi d_{mot}^2}{4} = \frac{\pi 0,75^2}{4} = 0,44 \text{ m}^2$$

Ainsi :

$$D = \rho S V = 0,769 \cdot 0,44 \cdot \frac{800}{3,6} = 75,53 \text{ kg/s}$$

## I- Compresseur

On considère que la compression est adiabatique réversible.

- 3) Calculez la température totale en sortie du compresseur  $T_{t2}$ , sachant que le rapport de compression vaut  $\pi_c = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = 5$ .

L'air passant très rapidement dans le compresseur, on peut considérer qu'il n'y a aucun échange de chaleur entre l'air et le milieu qui l'entoure. De plus on considère que la compression de l'air est un processus réversible, c'est-à-dire que l'air récupère toute l'énergie fournie par le compresseur. On L'enthalpie de l'air (et donc sa température totale) augmente.

On sait que pendant une transformation adiabatique réversible concernant un volume de gaz  $v$  considéré parfait, de pression  $P_s$ , on a la relation :

$$P_s v^\gamma = cste$$

Or la loi des gaz parfait nous donne :

$$P_s v = nRT_s$$

Ainsi, on peut écrire :

$$P_s \left( \frac{nRT_s}{P_s} \right)^\gamma = cste \rightarrow \frac{T_s^\gamma}{P_s^{\gamma-1}} = cste$$

Or d'après les relations entre grandeurs totales et statiques données dans l'énoncé :

$$\frac{T_s^\gamma}{P_s^{\gamma-1}} = \frac{\left( \frac{T_t}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^\gamma}{\left( \frac{P_t}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \right)^{\gamma-1}} = \frac{\frac{T_t^\gamma}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^\gamma}}{\frac{P_t^{\gamma-1}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^\gamma}} = \frac{T_t^\gamma}{P_t^{\gamma-1}}$$

Ainsi, au cours de la compression de l'air :

$$\frac{T_t^\gamma}{P_t^{\gamma-1}} = cste$$

Soit donc en considérant l'état de l'air juste à l'entrée du compresseur, et juste à la sortie :

$$\frac{T_{t1}^\gamma}{P_{t1}^{\gamma-1}} = \frac{T_{t2}^\gamma}{P_{t2}^{\gamma-1}}$$

Ainsi :

$$T_{t2} = \left( \frac{P_{t2}}{P_{t1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_{t1}$$

Et en sachant que :

$$T_{t1} = T_{s1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) = 282,7 \text{ K}$$

Et :

$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = 5$$

On obtient finalement :

$$T_{t2} = 447,79 \text{ K}$$

On observe bien une augmentation de la température totale de l'air, qui est due au fait que le compresseur lui fournisse de l'énergie.

- 4) Calculez le travail  $W_c$  reçu par seconde par l'air au cours de la compression.

On l'a vu à la question précédente, l'air voit sa température totale augmenter au passage du compresseur, ce qui signifie que son enthalpie augmente. La valeur de cette augmentation dépend directement du travail fourni par le compresseur par seconde à l'air :

$$\Delta H_{12} = DC_p(T_{t2} - T_{t1}) = W_c = 12,47 \text{ MJ/s}$$

## II- Chambre de combustion

On considère la transformation à pression totale constante. L'énergie potentielle chimique contenue dans le carburant permet d'augmenter la température totale de l'air suivant la relation :

$$\Delta H_{32} = DC_p(T_{t3} - T_{t2}) = C_i L$$

Avec :

- $C_i$  (kg/s) le débit de carburant.

- $L = 10\,500 \text{ kcal/kg}$ , la quantité d'énergie récupérable par kilogramme de carburant brûlé.

On donne le débit total (air + carburant) dans la chambre de combustion  $D_3 = 1,02D$ .

On rappelle que  $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ .

- 5) Donnez la température totale en sortie de chambre  $T_{t3}$ .

Après avoir été comprimé, l'air passe dans la chambre de combustion où il va de nouveau recevoir de l'énergie. Désormais, c'est l'énergie potentielle chimique du carburant qui sera cédée à l'air.

Comme on l'a vu pour les questions concernant le compresseur, une augmentation d'énergie de l'air représente en fait une augmentation de sa température totale.

Afin de calculer la nouvelle température totale de l'air après la combustion, on applique directement la formule donnée dans l'énoncé :

$$DC_p(T_{t3} - T_{t2}) = C_i L \rightarrow T_{t3} = \frac{C_i L}{D_3 C_p} + T_{t2}$$

En sachant que le débit de carburant est :

$$C_i = D_3 - D = 0,02D = 1,51 \text{ kg/s}$$

Et :

$$L = 10\,500\,000 \text{ cal/kg} = 43,89 \text{ MJ/kg}$$

Ainsi la température de l'air en sortie de chambre de combustion est :

$$T_{t3} = 1308,38 \text{ K}$$

La valeur de cette température est importante par rapport à l'entrée dans la chambre, ce n'est pas surprenant puisque la combustion du carburant implique un énorme apport de chaleur à l'air (le calcul nous donne  $C_i L = 66,27 \text{ MJ/s}$ ).

### III- Turbine

On considère une détente adiabatique réversible.

- 6) Sachant que tout le travail  $W_c$  que la masse d'air avait reçu du compresseur en un temps donné est entièrement redonné à la turbine pendant ce même temps, calculez la température totale en sortie de turbine  $T_{t4}$ .

Désormais, l'air va céder de l'énergie à la turbine afin d'entretenir le mouvement de rotation de l'ensemble compresseur-turbine.

Il est dit dans la question que la quantité d'énergie de l'air cédée à la turbine par seconde est exactement la même que celle reçue par le compresseur par seconde.

Si l'on écrit l'équilibre dans cet échange énergétique, on a :

$$W_c + W_t = 0 \rightarrow W_t = -W_c$$

En sachant que l'énergie récupérée par la turbine par seconde s'écrit :

$$W_t = \Delta H_{34} = D_3 C_p (T_{t4} - T_{t3})$$

Donc :

$$D_3 C_p (T_{t4} - T_{t3}) = -W_c \rightarrow T_{t4} = -\frac{W_c}{D_3 C_p} + T_{t3}$$

Or nous avons calculé la quantité d'énergie fournie par seconde par le compresseur à l'air à la question 4), ainsi que la température totale de l'air en sortie de chambre de combustion à la question 5).

Ainsi :

$$T_{t4} = -\frac{W_c}{D_3 C_p} + T_{t3} = -\frac{12,47 \cdot 10^6}{1,02 \cdot 75,53 \cdot 1000} + 1308,38 = 1146,52 \text{ K}$$

L'air cède de l'énergie, donc sa température totale diminue bien.

7) Calculez le rapport de détente  $\pi_t = \frac{P_{t4}}{P_{t3}}$ .

Par le même raisonnement qu'à la question 3), on peut écrire pendant la transformation adiabatique réversible que :

$$\frac{T_t^\gamma}{P_t^{\gamma-1}} = cste$$

Soit entre l'état de l'air à l'entrée et la sortie de la turbine :

$$\frac{T_{t3}^\gamma}{P_{t3}^{\gamma-1}} = \frac{T_{t4}^\gamma}{P_{t4}^{\gamma-1}}$$

Ainsi :

$$\frac{P_{t4}}{P_{t3}} = \left( \frac{T_{t4}}{T_{t3}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,63$$

On trouve bien un rapport inférieur à l'unité puisque la pression totale diminue au passage dans la turbine, contrairement au compresseur.

8) Expliquez de manière très brève en quoi ces calculs représentent un cas idéal.

On a omis les pertes de charge (onde de choc, frottement), pertes thermiques, le rendement de la combustion etc.

Ainsi, les échanges d'énergie entre l'air et l'arbre moteur (compresseur-turbine) occasionnent des pertes. De plus l'air, en se baladant dans les différents étages, va perdre de l'énergie.

Enfin, l'énergie potentielle chimique du carburant n'est pas complètement cédée à l'air lors de la combustion.



---

### Exercice 4 : Automatique

- 1- Dites brièvement pourquoi, contrairement aux avions, il est primordial de distinguer les cas de vol stationnaire et vol d'avancement pour l'étude du comportement de l'hélicoptère.

Entre le vol stationnaire où la vitesse air perçue par le fuselage est nulle, et le vol d'avancement, les efforts aérodynamiques sont complètement différents (sans compter l'effet du souffle rotor sur l'empennage).

Les équations du principe fondamental de la dynamique, ainsi que du théorème du moment cinétique seront complètement différentes, et donneront des matrices différentes.

- 2- Au vu de la taille de notre système, combien de modes peut-il y avoir (détaillez les cas possibles) ?

On a quatre paramètres ( $\Delta V, V_z, q, \theta$ ) donc quatre valeurs propres.

On distingue donc trois cas possibles :

- 1- 4 valeurs propres réelles = 4 modes apériodiques
- 2- 2 valeurs propres réelles/2 complexes = 2 modes apériodiques/1 périodique
- 3- 4 valeurs propres complexes = 2 modes périodiques

#### Partie A :

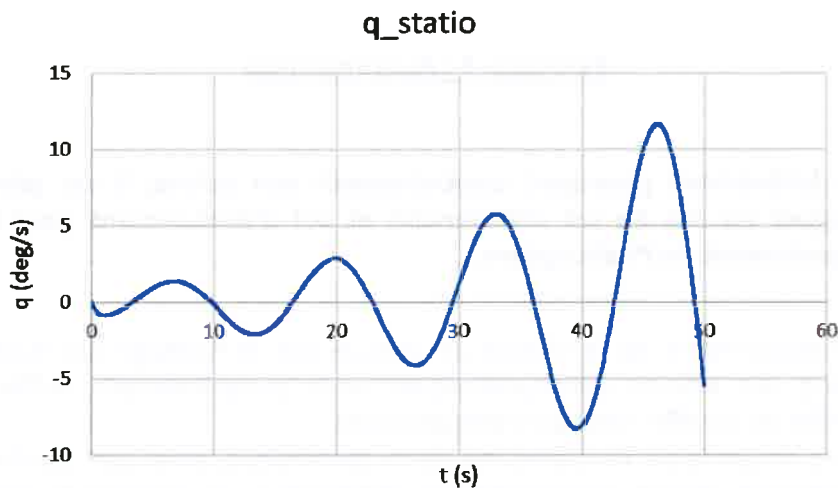
Etude de l'évolution de la vitesse de tangage  $q$  en stationnaire, suite à une brève perturbation.

On fait l'hypothèse que la vitesse verticale  $V_z$  reste approximativement nulle. De plus on considère que le pilote ne bouge pas le manche ( $\Delta D\delta m = 0$ ).

Ainsi le système devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_V & F_q & F_\theta \\ M_V & M_q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ q \\ \theta \end{pmatrix}$$

Sa résolution nous permet de trouver notamment  $q(t)$  :



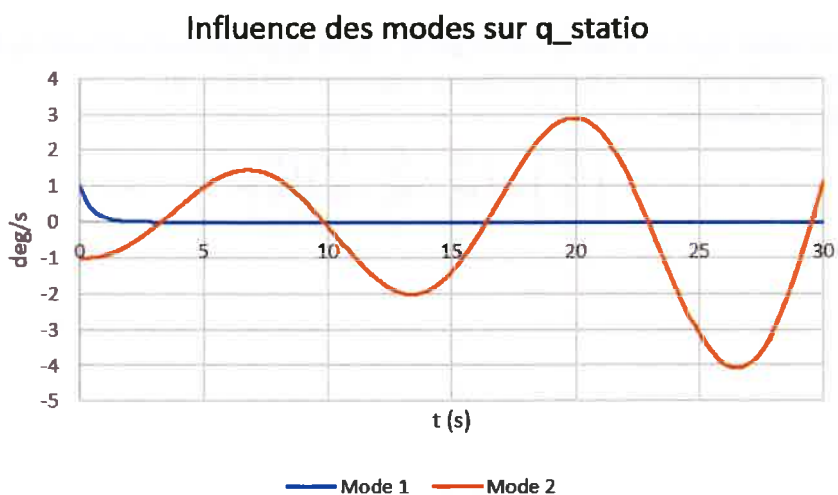
**3- En observant seulement l'évolution de  $q_{statio}$ , justifiez la nature de chacun des modes (apériodique/périodique et convergent/divergent).**

*On observe un mouvement oscillatoire, donc il y a un mode périodique soit 2 valeurs propres complexes. Etant donné que pour cette étude on a 3 paramètres donc 3 valeurs propres, la dernière valeur propre est nécessairement réelle, donc correspond à un mode apériodique.*

*On observe que le mode périodique est divergent.*

*Le mode apériodique est convergent puisque la sinusoïde est centrée sur l'axe des abscisses ( $q = 0$  deg/s).*

On détaille plus précisément l'évolution de la vitesse de tangage, et l'influence de chacun des modes :



4- Justifiez grossièrement grâce au graphique précédent que les racines en stationnaire sont :

$$\lambda_1 = -2,0276 \text{ et } \lambda_{2\pm} = 0,0534 \pm 0,4790i$$

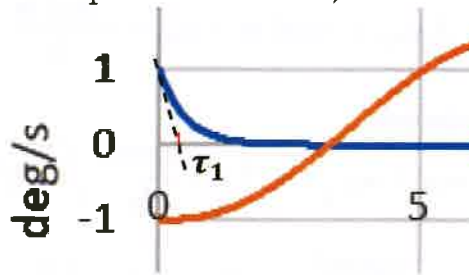
Globalement on a la forme de la vitesse de tangage :

$$q(t) = \text{mode 1} + \text{mode 2} = k_q e^{\lambda_1 t} + k'_q e^{-\xi_2 \omega_{n2} t} \sin(\omega_{p2} t + \varphi_{q2})$$

$$q(t) = k_q e^{-2,0276 t} + k'_q e^{0,0534 \cdot t} \sin(0,4790 \cdot t + \varphi_{q2})$$

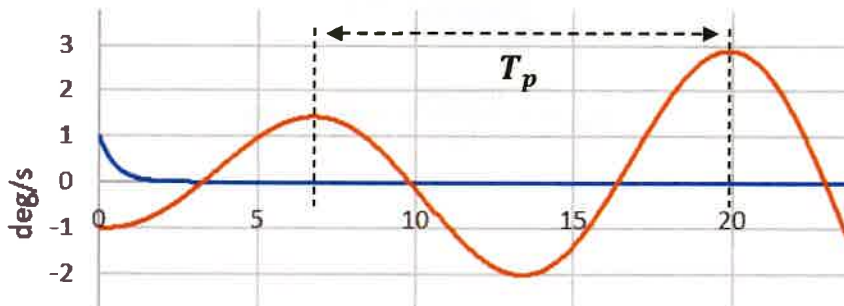
Le premier terme représente le mode 1, très rapidement convergent. On peut retrouver la valeur du temps caractéristique graphiquement (intersection entre la pente à l'origine et l'axe des abscisses) :

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \approx 0,5 \text{ s} \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{0,5} = -2 \text{ s}^{-1}$$



La période de la sinusoïde (mode 2) se retrouve graphiquement :

$$T_p \approx 13 \text{ s} = \frac{2\pi}{\omega_p} \rightarrow \omega_p = \frac{2\pi}{13} = 0,483 \text{ rad/s}$$



Ensuite, en se plaçant à  $t = 20 \text{ s}$  le premier terme de  $q(t)$  vaut 0, et l'on se situe sur une crête de la sinusoïde, le sinus dans le second terme vaut donc 1. Graphiquement, on a la valeur  $q(20) \approx 3 \text{ deg/s}$ .

Donc en reprenant l'expression de  $q(t)$  :

$$q(t = 20) = k'_q e^{-\xi_2 \omega_{n2} \cdot 20} = 3 \rightarrow \xi_2 \omega_{n2} = -\frac{\ln\left(\frac{3}{k'_q}\right)}{20}$$

Or on a l'expression du mode 2 à  $t = 0$  s qui vaut  $k'_q \sin(\varphi_{q2})$ , et graphiquement la valeur est  $-1$  deg/s (crête de la sinusoïde). Donc on doit prendre  $\varphi_{q2} = -\frac{\pi}{2}$  et  $k'_q = 1$  deg/s.

Finalement :

$$\xi_2 \omega_{n2} = -\frac{\ln(3)}{20} = -0,0549 \text{ s}^{-1}$$

**5- Déterminez la pulsation naturelle  $\omega_{n2}$  ainsi que l'amortissement réduit  $\xi$  du mode périodique.**

On a (attention au fait que  $\xi_2 < 0$ , puisque le mode est divergent) :

$$\xi_2 \omega_{n2} = -0,0534 \rightarrow \omega_{n2} = -\frac{0,0534}{\xi_2}$$

Et sachant que l'on a la relation :

$$\omega_{p2} = \omega_{n2} \sqrt{1 - \xi_2^2} = -\frac{0,0534}{\xi_2} \sqrt{1 - \xi_2^2}$$

Donc :

$$\omega_{p2}^2 = \frac{0,0534^2}{\xi_2^2} (1 - \xi_2^2) = 0,0534^2 \left( \frac{1}{\xi_2^2} - 1 \right)$$

Il vient que :

$$\xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\omega_{p2}}{0,0534}\right)^2 + 1}} = -0,11$$

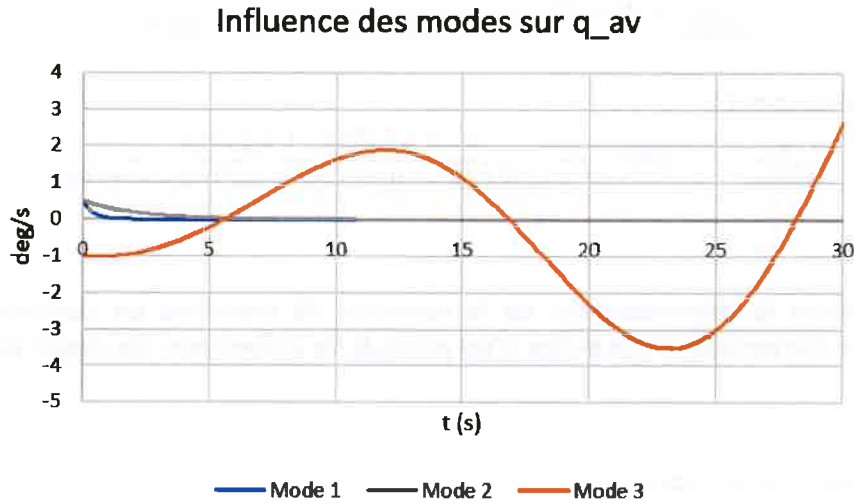
Puis :

$$\omega_{n2} = -\frac{0,0534}{\xi_2} = 0,482 \text{ rad/s}$$

## Partie B :

### Etude de l'évolution de la vitesse de tangage $q$ en vol d'avancement, suite à une brève perturbation.

La résolution du système complet (en tenant compte de la variation de  $V_z$  cette fois) nous permet de tracer  $q(t)$  :



**6- Dans quel cas (stationnaire/avancement) l'hélicoptère vous paraît plus simple à piloter ?**

*En stationnaire on avait une période du mode oscillatoire plus faible (13 s contre 23 en vol d'avancement), donc plus difficile à contrer pour le pilote.*

### Partie C :

Etude de la réponse en tangage  $q$  à une entrée au manche sinusoïdale.

On a les fonctions de transfert :

En stationnaire :

$$\frac{q}{\Delta D \delta m} = 26,4011 \frac{p^2 + 0,0084p}{p^3 + 1,9208p^2 + 0,0158p + 0,4716}$$

En vol d'avancement :

$$\frac{q}{\Delta D \delta m} = 27,6889 \frac{p^3 + 0,7256p^2 + 0,0126p}{p^4 + 2,9717p^3 + 0,9433p^2 + 0,2782p + 0,1886}$$

**7- Exprimez le dénominateur de la fonction de transfert en stationnaire sous forme factorisée, c'est-à-dire d'un produit de polynômes de degré au plus 2.**

Note :

*C'est une question compliquée.*

*-Ce que l'on « peut savoir », c'est qu'il est possible de factoriser un polynôme en fonction de ses racines.*

*-Ce que l'on ne sait pas forcément, c'est que les racines du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert en stationnaire correspondent en fait aux valeurs propres du cas stationnaire vues dans la partie A.*

*L'idée était donc d'aller chercher les informations intuitivement utiles dans les questions vues précédemment (en partant du principe que l'on sait qu'un polynôme peut se factoriser en fonction de ses racines...).*

*Généralement si la question vous conduit à faire des calculs très complexes, comme cela peut être le cas ici, c'est qu'il y a une solution beaucoup plus simple.*

On réutilise alors les résultats de la partie A :

$$\begin{aligned} p^3 + 1,9208p^2 + 0,0158p + 0,4716 &= (p - \lambda_1)(p - \lambda_{2+})(p - \lambda_{2-}) \\ &= (p - \lambda_1)(p^2 - (\lambda_{2+} + \lambda_{2-})p + \lambda_{2+}\lambda_{2-}) \\ &= (p - \lambda_1) \left( p^2 - (-\xi_2\omega_{n2} + i\omega_{p2} - \xi_2\omega_{n2} - i\omega_{p2})p + (-\xi_2\omega_{n2} + i\omega_{p2})(-\xi_2\omega_{n2} - i\omega_{p2}) \right) \\ &= (p - \lambda_1) \left( p^2 + 2\xi_2\omega_{n2}p + (-\xi_2\omega_{n2} + i\omega_{p2})(-\xi_2\omega_{n2} - i\omega_{p2}) \right) \end{aligned}$$

Or on remarque que :

$$(-\xi_2\omega_{n2} + i\omega_{p2})(-\xi_2\omega_{n2} - i\omega_{p2}) = (-\xi_2\omega_{n2})^2 - (i\omega_{p2})^2 = (\xi_2\omega_{n2})^2 + \omega_{p2}^2$$

Et :

$$\omega_{p2}^2 = \left( \omega_{n2} \sqrt{1 - \xi_2^2} \right)^2 = \omega_{n2}^2 - (\xi_2 \omega_{n2})^2$$

Ainsi :

$$(-\xi_2 \omega_{n2} + i \omega_{p2})(-\xi_2 \omega_{n2} - i \omega_{p2}) = \omega_{n2}^2$$

Et donc :

$$\begin{aligned} p^3 + 1,9208p^2 + 0,0158p + 0,4716 &= (p - \lambda_1)(p^2 + 2\xi_2\omega_{n2}p + \omega_{n2}^2) \\ &= (p + 2,0276)(p^2 - 2,0534p + 0,482^2) \end{aligned}$$

Soit :

$$p^3 + 1,9208p^2 + 0,0158p + 0,4716 = (p + 2,0276)(p^2 - 0,1068p + 0,2323)$$

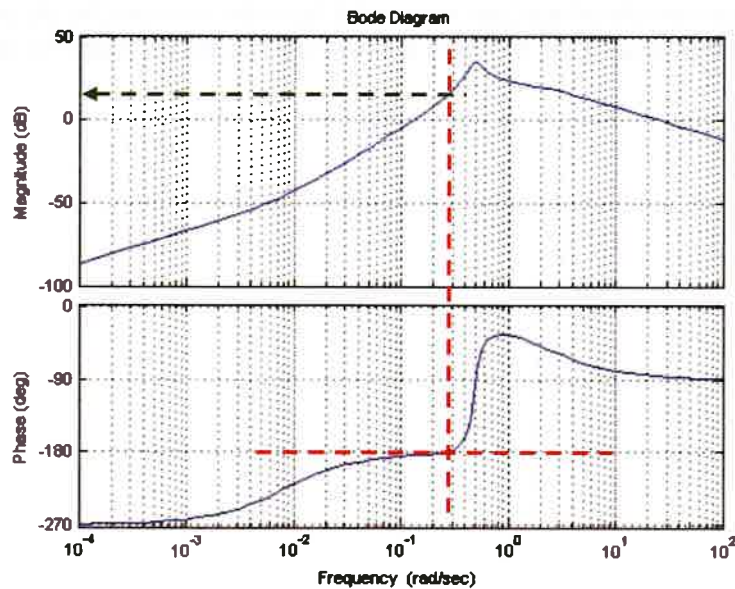
### 8- Déterminez les marges de gain pour les deux cas. Commentaires ?

Graphiquement on obtient environ :

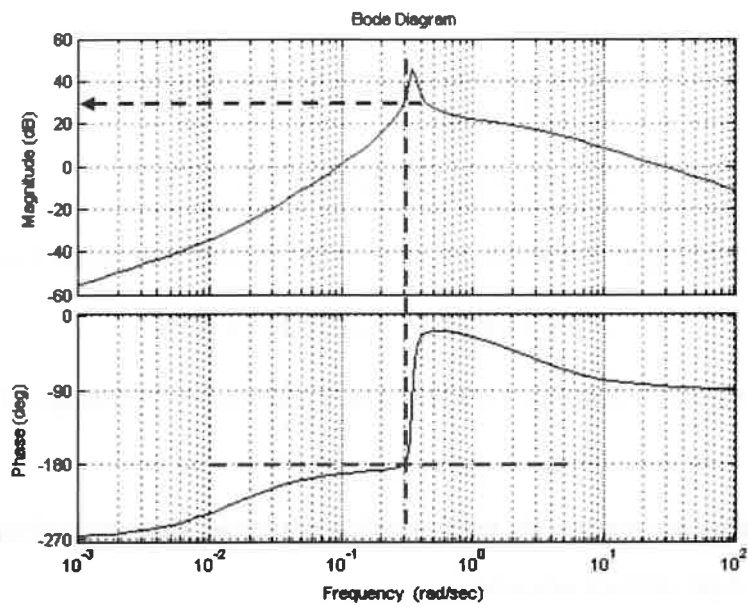
-En stationnaire : -15 dB.

-En vol d'avancement : -30 dB.

On prend le gain au moment où la phase est à  $-180^\circ$  :



En stationnaire



*En vol d'avancement*

*Il y a un problème clair d'instabilité puisque le gain est positif lorsque l'hélicoptère répond en opposition de phase par rapport à l'entrée au manche du pilote (risque de divergence du mouvement en tangage à cause de l'ordre au manche du pilote).*

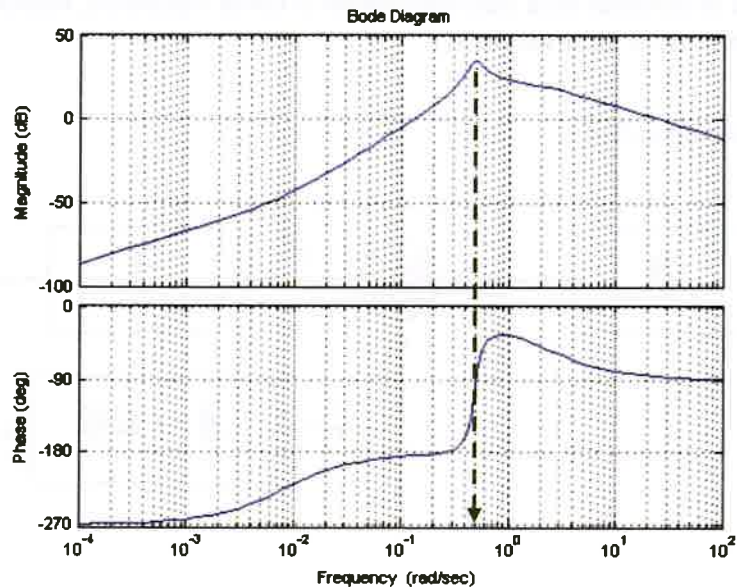


9- Donnez la pulsation de résonance dans les deux cas, et dites si cela risque d'être problématique au niveau du pilotage pour chacune des deux missions suivantes :

a-Observation d'une zone restreinte (stationnaire)

b-Observation d'une zone immense (vol d'avancement)

On retrouve la pulsation de résonance au pic de Gain :



Graphiquement, la pulsation de résonance en stationnaire est  $5 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$  soit :

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 0,0795 \text{ Hz}$$

Ou :

$$T_r = \frac{1}{f_r} = 12,57 \text{ s}$$

La pulsation de résonance en vol d'avancement est  $3,5 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$  soit :

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 0,0557 \text{ Hz}$$

Ou :

$$T_r = \frac{1}{f_r} = 17,95 \text{ s}$$

-En stationnaire le pilote corrige en permanence son ordre au manche pour stabiliser l'attitude de son hélicoptère, donc une période critique égale à 12,57 s est largement acceptable.

-En vol d'avancement en revanche, on corrige l'attitude de l'hélicoptère de manière moins fréquente. Peut-être qu'une période critique de 17,95 s est plus dangereuse, mais intuitivement on peut penser que cela ne posera pas de gros problèmes.

**Partie D:**

On cherche à corriger le mode périodique en stationnaire de sorte à obtenir :

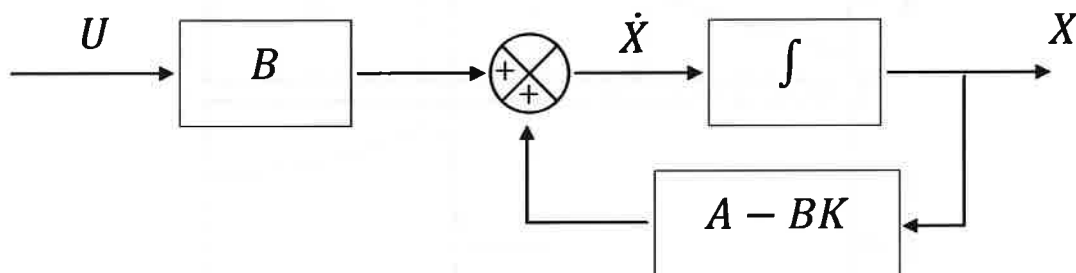
$$\lambda_1 = -2,0276 \text{ et } \lambda_2 = -0,0534 \pm 0,7i$$

Cela revient à trouver une certaine matrice  $K$  telle que :

$$\dot{X} = (A - BK).X + BU$$

**10- Dessinez le schéma bloc correspondant à cette équation, sachant que l'entrée du schéma est  $U$  et la sortie  $X$ .**

On a le schéma bloc suivant :



**11- Quels sont les effets de cette correction ? Pensez-vous que le pilotage de l'hélicoptère est rendu plus simple avec cette correction ?**

*La période du mode oscillatoire est plus courte, mais l'amortissement est positif cette fois-ci. Ce n'est pas l'idéal, mais au moins l'hélicoptère est stable.*

*La marge de gain est désormais positive, ce qui confirme ce qui a été dit précédemment.*

*La pulsation de résonance est  $7 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$  soit  $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 0,11 \text{ Hz}$  ou  $T_r = \frac{1}{f_r} = 9 \text{ s}$ . Ce n'est pas mieux qu'avant où l'on avait une période plus grande, néanmoins la valeur reste acceptable.*

### Exercice 5 : Dimensions

On définit le nombre de Bagnold ( $Ba$ ) en rhéologie, « utilisé pour caractériser l'écoulement de grains de sable et permet surtout de déterminer à partir de quelles conditions l'écoulement passe d'un fluide à seuil à celui d'un fluide granulaire où l'énergie est dissipée par choc entre les grains et non plus par frottement. Il représente le rapport entre l'énergie cinétique dissipée et l'énergie dissipée par choc entre les grains de sable. » ([www.bonne-mesure.com](http://www.bonne-mesure.com)).

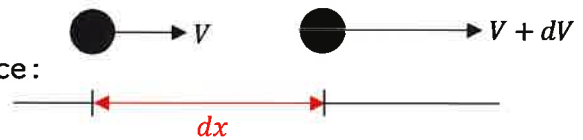
Son expression peut se mettre sous la forme :

$$Ba = \frac{m^a \gamma^b}{2L_c^c \mu}$$

Avec :

- $m$  la masse d'un grain

- $\gamma$  le gradient de vitesse en fonction de la distance :



- $L_c$  une longueur caractéristique

- $\mu$  la viscosité du fluide contenant les grains, exprimée en  $kg.m^{-1}.s^{-1}$

Sachant que c'est un nombre sans dimension, donnez les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

En remplaçant les termes par leurs unités respectives, on a :

$$[Ba] = \frac{M^a \left( \frac{L}{T} \right)^b}{L^c \frac{M}{LT}} = \frac{M^{a-1} T^{-b+1}}{L^{c-1}}$$

Sachant que le nombre de Bagnold est sans dimension :

$$a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

$$-b + 1 = 0 \rightarrow b = 1$$

$$c - 1 = 0 \rightarrow c = 1$$

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

-----

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »

-----

SESSION DU 15 NOVEMBRE 2021

-----

ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES

---

Durée: 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée --  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur ce document

Document validé par :

Nom :

Date : 05/11/2021

Signature :

**Lieutenant-colonel Stéphane Alma**  
**Directeur de l'EPNER**





### **EXERCICE 1: Analyse dimensionnelle**

Le nombre de Bansen  $Ba$  est un nombre sans dimension utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert d'énergie thermique par radiation et le transfert par convection.

On le définit de la manière suivante :

$$Ba = \frac{h_r S}{F c_p}$$

Avec :

- $h_r$  : le coefficient de transfert thermique par radiation

- $S$  : la surface de transfert

- $F$  : le débit massique

- $c_p$  : la capacité thermique, qui représente la quantité d'énergie thermique que l'on doit transférer à un corps pour augmenter sa température. Sa valeur est donc l'énergie à apporter à un kilogramme de ce corps pour augmenter sa température d'un Kelvin.

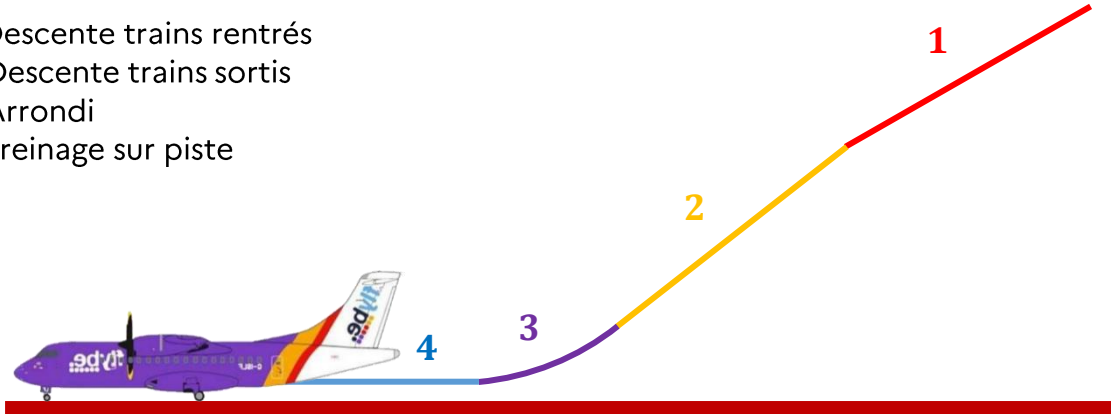
(Source : Wikipédia)

Donnez l'unité de  $h_r$ .

## EXERCICE 2 : Avion à l'atterrissage

On s'intéresse à l'atterrissage d'un avion de ligne type ATR 42.  
Pour se faire, on décomposera l'étude en quatre phases :

- 1-Descente trains rentrés
- 2-Descente trains sortis
- 3-Arrondi
- 4-Freinage sur piste



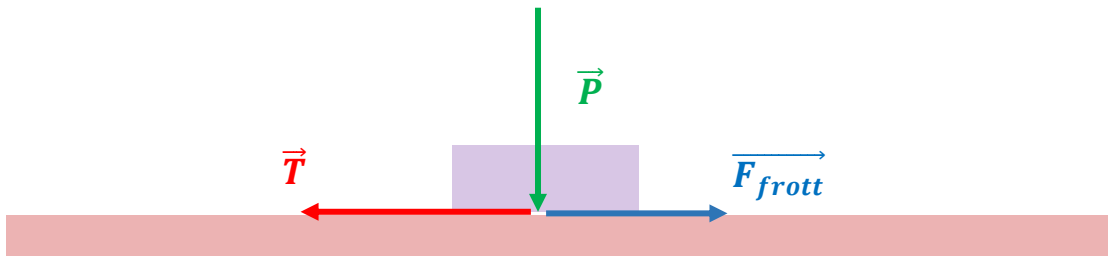
On dispose des données suivantes :

- Masse :  $m = 10\,000\text{ kg}$
- Surface alaire :  $S = 54,5\text{ m}^2$
- Surface fuselage (vue de face) :  $S_{fus} = 7\text{ m}^2$
- Surface trains (vue de face) :  $S_{trains} = 0,5\text{ m}^2$
- Coefficient de traînée du fuselage :  $C_{x\,fus} = 0,85$
- Coefficient de traînée des trains :  $C_{x\,trains} = 1$
- Calage des ailes :  $\varepsilon = 1,5^\circ$
- Densité de l'air :  $\rho = 1,225\text{ kg/m}^3$

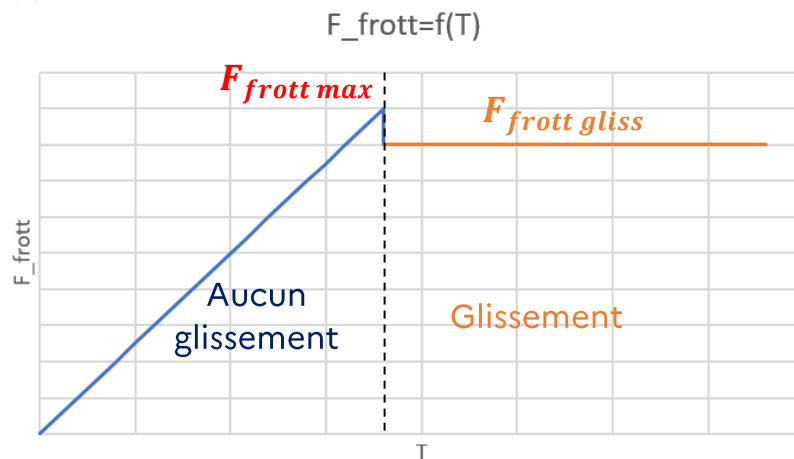
-Coefficient d'adhérence des roues au sol :

Le module de la force de frottement  $\vec{F}_{frott}$  s'exerçant sur un objet d'un certain poids  $\vec{P}$ , soumis à une force qui le tracte  $\vec{T}$ , s'écrit :

$$F_{frott} = f \cdot P$$



Avec le coefficient d'adhérence  $f$ . On a l'évolution de  $F_{frott}$  en fonction du module de la force tractrice  $\vec{T}$  :



Tant que  $T \leq F_{frott\ max} = f_s P$ , l'objet ne glisse pas par rapport au sol.

Ensuite,  $F_{frott} = F_{frott\ gliss} = f_c \cdot P$

Pour la piste d'atterrissage dans notre exercice, on prendra  $f_s = 0,9$  et  $f_c = 0,8$ .

On définit le bilan des forces, ainsi que les trois repères Terre, fuselage et air :

-Centre de gravité de l'avion :  $G$

-Repère Terre  $R_0 : (G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , l'axe  $\vec{y}_0$  étant perpendiculaire à la feuille, et orienté vers la table

-Repère fuselage  $R_f : (G, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$ , l'axe  $\vec{y}_f$  étant confondu avec  $\vec{y}_0$

-Repère air  $R : (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , l'axe  $\vec{y}$  étant confondu avec  $\vec{y}_0$

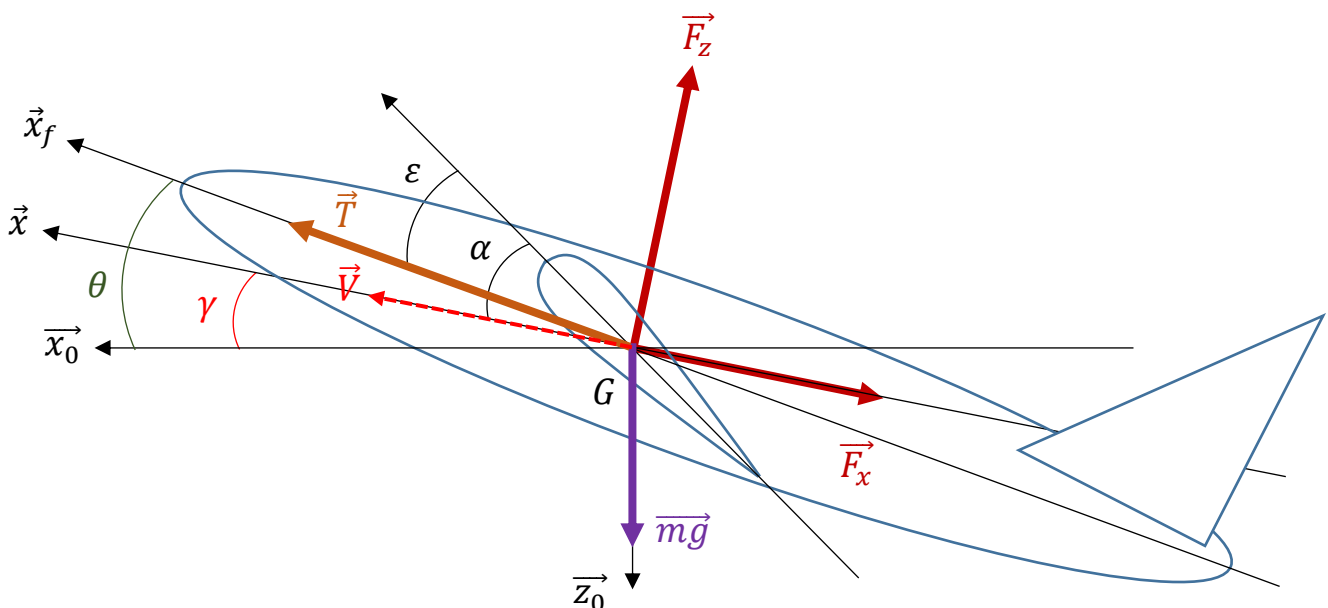
Les angles utilisés sont tous positifs sur le schéma ci-dessous, et sont appelés :

-Angle d'incidence de l'aile :  $\alpha$

-Angle de calage de l'aile :  $\varepsilon$

-Assiette fuselage :  $\theta$

-Pente de la trajectoire :  $\gamma$





On écrit les forces s'exerçant sur l'avion (que l'on suppose toutes s'appliquer en G) :

-La poussée des deux moteurs :

$$\vec{T} = T \cdot \vec{x}_f$$

-Le poids de l'avion :

$$\vec{m}g = mg \cdot \vec{z}_0$$

Avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

-La portance des ailes :

$$\vec{F}_z = -F_z \cdot \vec{z} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_z \cdot \vec{z}$$

Avec :

$$C_z = A \alpha$$

Sachant que  $A = 0,1 \text{ deg}^{-1}$ .

-La traînée de l'avion trains sortis :

$$\vec{F}_x = -F_x \cdot \vec{x} = -(F_{x \text{ aile}} + F_{x \text{ fus}} + F_{x \text{ trains}}) \cdot \vec{x} = -\frac{1}{2} \rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{x \text{ fus}} + S_{trains} C_{x \text{ trains}}) \cdot \vec{x}$$

Avec :

$$C_x = C_{x0} + k C_z^2$$

Sachant que  $C_{x0} = 0,015$  et  $k = 0,03$ .

#### Conventions :

On écrira pour un vecteur  $\vec{X}$  quelconque projeté dans le repère Terre :

$$\vec{X} = a_0 \vec{x}_0 + b_0 \vec{y}_0 + c_0 \vec{z}_0$$

Soit sous forme matricielle :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Pour la vitesse on définit le nom des coordonnées :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \\ V_{z0} \end{pmatrix}_{R_0}$$

Et on a :

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + V_{z0}^2}$$

On écrira la dérivée du vecteur vitesse par rapport au repère Terre, projetée dans le repère Terre :

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_0}$$

## I- Etablissement des équations

Nous allons étudier le mouvement de l'avion par rapport au sol en écrivant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) projeté dans le repère Terre :

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R_0} = (\overline{m\vec{g}})_{R_0} + (\overline{F_z})_{R_0} + (\overline{F_x})_{R_0} + (\overline{T})_{R_0}$$

Où par exemple  $(\overline{m\vec{g}})_{R_0}$  représente la projection du vecteur  $\overline{m\vec{g}}$  dans le repère Terre  $R_0$ .

- Donnez l'expression de la projection de  $\vec{V}$  dans le repère Terre sous forme matricielle  $(\vec{V})_{R_0}$ .
- Ecrivez les équations données par le PFD.
- Donnez la relation qui lie les angles  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  et  $\theta$ .

## II- Descente trains rentrés

L'avion suit une trajectoire rectiligne et le pilote sait, d'après les indications à bord, que les composantes de vitesse par rapport au sol sont constantes et valent :

$$V_{x0} = 250 \text{ km/h et } V_{z0} = 10 \text{ km/h}$$

- Donnez la valeur de  $\gamma$  **en vous aidant du tableau du cosinus et sinus donné en annexe**.
- En reprenant les équations du PFD, et en supposant que les composantes projetées sur l'axe vertical terrestre de la traînée  $F_x$  et de la poussée des moteurs  $T$  sont négligeables, calculez l'incidence  $\alpha$  des ailes.
- En déduire l'assiette  $\theta$  de l'avion.
- Calculez la traînée de l'avion.
- En déduire la poussée  $T$  des moteurs.

### III- Descente trains sortis

Le pilote sort les trains, mais ne modifie pas la poussée des moteurs. Il laisse l'avion se stabiliser de nouveau à une nouvelle vitesse.

On a désormais :

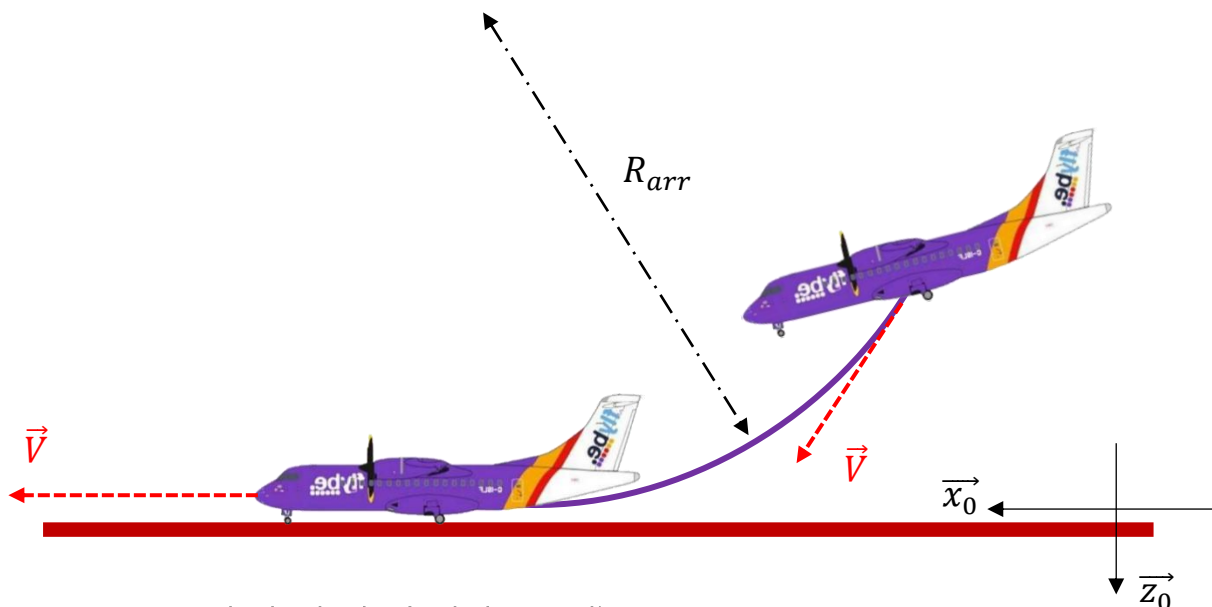
$$V_{x0} = 220 \text{ km/h} \text{ et } V_{zf} = 30 \text{ km/h}$$

- Calculez la nouvelle incidence des ailes.
- Calculez la traînée de l'avion, ainsi que la poussée affichée par les moteurs.
- Faites un bilan rapide des résultats obtenus dans les cas sans et avec trains.  
Expliquez brièvement comment les forces s'organisent pour assurer l'équilibre de l'avion dans chaque cas.

### IV- Arrondi

On suppose que lors de l'arrondi (trajectoire circulaire de rayon  $R_{arr} = 2\,000 \text{ m}$ ), la vitesse de l'avion est constante et vaut la vitesse totale précédemment calculée moins  $50 \text{ km/h}$  (décélération due à la sortie d'aérofreins).

Le pilote débute son arrondi avec la pente précédemment calculée (trains sortis), et le termine lorsque l'avion est complètement posé au sol.



- Calculez la durée de l'arrondi  $t_{arr}$ .
- Déterminez l'incidence des ailes au cours de l'arrondi (on supposera la pente faible :  $\cos \gamma \approx 1$  et on néglige l'influence des moteurs).

## V- Freinage sur piste

Une fois sur la piste, le pilote coupe la poussée des moteurs et rentre les aérofreins.

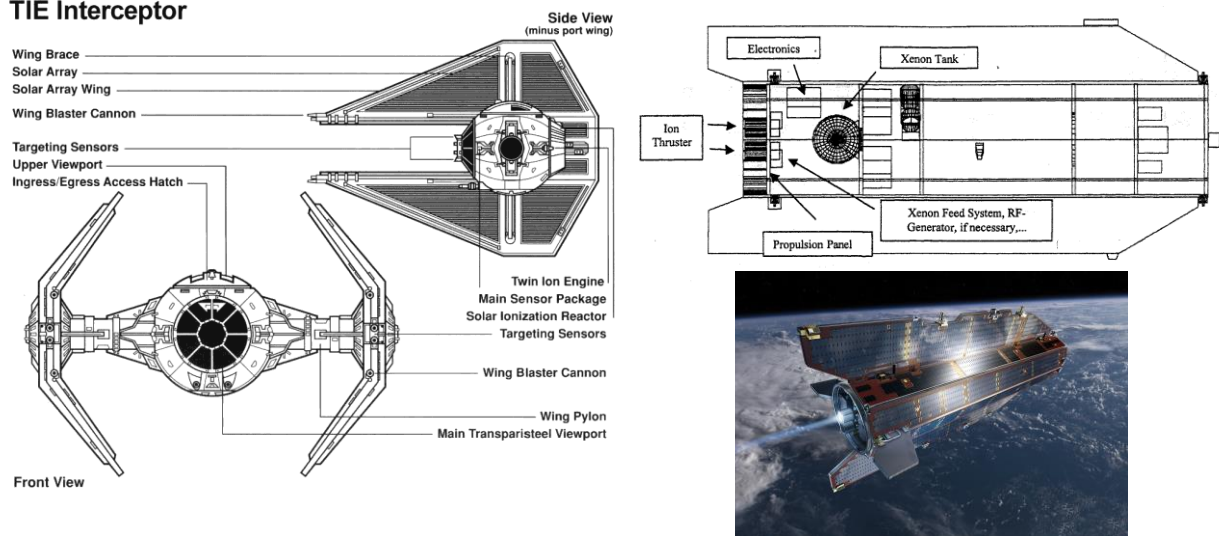
- a. Faites un schéma avec le bilan des forces, une fois que l'avion est en train de freiner sur la piste (le pilote actionne les freins). On considérera que le train d'atterrissage de l'avion est constitué de trois roues (une à l'avant, deux à l'arrière: on supposera une répartition du poids égale entre chaque roue).
- b. Calculez la portance des ailes au début de la décélération et justifiez que l'on puisse la négliger dans notre étude.
- c. Donnez l'expression de la force de frottement  $\overrightarrow{F_{frott}}$  s'exerçant sur chaque roue en fonction du poids de l'avion et du coefficient d'adhérence des roues au sol.
- d. Donnez l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse  $V$ . Est-il possible de la résoudre simplement? Pourquoi?
- e. On se propose de simplifier le terme de traînée. On va faire l'approximation que la dépendance en  $V$  est linéaire:  $F_x = KV$  avec  $K$  une constante.  
Calculez la traînée de l'avion au tout début de la décélération. En déduire la valeur de  $K$  (et son unité) la plus cohérente pour notre étude.
- f. On considère que le pilote freine de telle sorte que les roues soient bloquées tout le temps de la décélération.  
Calculez le temps de freinage.

Annexe :

x	cos(x)	sin(x)		x	cos(x)	sin(x)
-0,05	0,999	-0,050		-0,146	0,989	-0,145
-0,049	0,999	-0,049		-0,145	0,990	-0,144
-0,048	0,999	-0,048		-0,144	0,990	-0,144
-0,047	0,999	-0,047		-0,143	0,990	-0,143
-0,046	0,999	-0,046		-0,142	0,990	-0,142
-0,045	0,999	-0,045		-0,141	0,990	-0,141
-0,044	0,999	-0,044		-0,14	0,990	-0,140
-0,043	0,999	-0,043		-0,139	0,990	-0,139
-0,042	0,999	-0,042		-0,138	0,990	-0,138
-0,041	0,999	-0,041		-0,137	0,991	-0,137
-0,04	0,999	-0,040		-0,136	0,991	-0,136
-0,039	0,999	-0,039		-0,135	0,991	-0,135
-0,038	0,999	-0,038		-0,134	0,991	-0,134
-0,037	0,999	-0,037		-0,133	0,991	-0,133
-0,036	0,999	-0,036		-0,132	0,991	-0,132
-0,035	0,999	-0,035		-0,131	0,991	-0,131
-0,034	0,999	-0,034		-0,13	0,992	-0,130
-0,033	0,999	-0,033		-0,129	0,992	-0,129
-0,032	0,999	-0,032		-0,128	0,992	-0,128
-0,031	1,000	-0,031		-0,127	0,992	-0,127
-0,03	1,000	-0,030		-0,126	0,992	-0,126
				-0,125	0,992	-0,125

### EXERCICE 3 : TIE (non) Fighter

#### TIE Interceptor



Le satellite GOCE de l'agence spatiale européenne, propulsé par deux propulseurs ioniques (*Twin Ion Thrusters*), était l'engin orbital le plus stylé et le plus ressemblant au célèbre chasseur (*Twin Ion Engines*) de l'Empire dans la non-moins célèbre fiction de George Lucas.

Le « *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer* » (prononcer [Go-ché], à l'italienne), était prévu pour effectuer un vol propulsé pendant 15000 heures (environ 20 mois) à 260 km d'altitude en moyenne en orbite  $\sim$ polaire, dans la *thermosphère*. La traînée de ce satellite profilé est par construction minimisée, mais pas nulle. Une fois son Xénon épuisé en 2013, sa chute a pris un mois seulement pour finir par se désintégrer comme une étoile filante en quelques minutes.

#### Données:

Masse totale en début de mission : 1100 kg  
Masse de fluide propulsif (Xe) : 40 kg  
Poussée maximale du propulseur ionique : 35 mN

- 1) Sachant que la traînée aérodynamique de GOCE varie entre 4 et 12 mN, calculez pour la poussée maximale les accélérations maximale/minimale/moyenne et justifiez l'approximation qui consiste à considérer la masse comme constante en moyenne à 1080 kg.

- 2) Ce propulseur utilise de l'énergie électrique pour ioniser et accélérer une masse de gaz propulsif (Xénon ici) et provoquer une réaction en retour (le gaz n'est donc pas le « carburant » au sens courant du terme). Au banc d'essais on a mesuré la poussée dans le quasi-vide, la consommation de Xénon, la consommation électrique et la vitesse d'éjection du Xénon ionisé (pour 1 propulseur) :

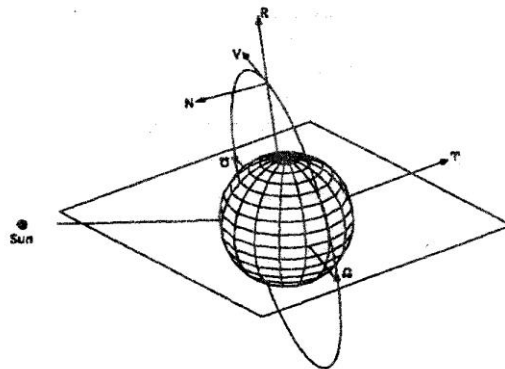
Poussée (N)	Débit massique (kg/s)	Puissance électrique fournie (W)	Vitesse d'éjection (m/s)
2,50E-003	3,50E-007	100	7142
5,00E-003	5,00E-007	170	10000
6,00E-003	5,25E-007	200	11428
1,20E-002	5,50E-007	380	21818

En calculant la puissance du jet de gaz ionisé, calculez l'évolution du rendement énergétique  $\eta$  (ou efficacité) en fonction du niveau de poussée.

En déduire la tendance et le point de fonctionnement préférentiel (toute considération opérationnelle mise de côté).

- 3) Bilan énergétique sur la mission.

1. Sachant que la vitesse du satellite par rapport au repère géocentrique (sans tenir compte de la rotation de la terre donc) sur son orbite circulaire peut s'écrire  $V_{ORB} = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{R_0+h}}$  où  $R_0$  est le rayon de la terre (6378 km),  $h$  l'altitude du satellite (260 km) et  $g_0$  l'accélération de la pesanteur au niveau du sol ( $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ), calculez l'énergie dépensée pour contrer la traînée de GOCE sur la durée de la mission en considérant l'hypothèse la plus pessimiste.



2. Calculer l'énergie totale de GOCE sur son orbite polaire par rapport au repère géocentrique ci-dessus (on supposera que l'on a toujours  $g = g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  pour le calcul de l'énergie potentielle).
  
3. Dans le bilan énergétique de la **mission**, calculez la part apportée par le lanceur pour placer l'engin sur son orbite.  
 Puis, estimez sur la durée prévue de la mission la part relative apportée par le satellite pour vaincre la traînée résiduelle (considérez cette énergie comme 100% embarquée sous une forme ou une autre).  
 Commentez par rapport au couple altitude moyenne/vitesse choisie.



## EXERCICE 4 : « First Man »



NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection  
<http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/index.html>  
 NASA Photo: E-4942 Date: 1959 Photo by: NASA photo

X-15 launch from B-52 mothership

### X-15

$S = 200 \text{ ft}^2$   
 $b = 22.36 \text{ ft}$   
 $\bar{c} = 10.27 \text{ ft}$

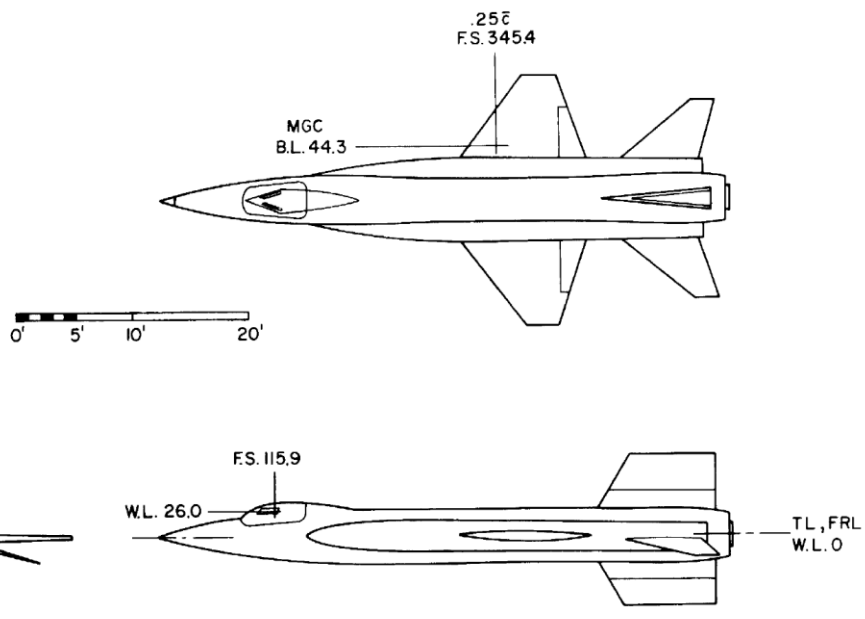


Figure V-2. X-15 General Arrangement

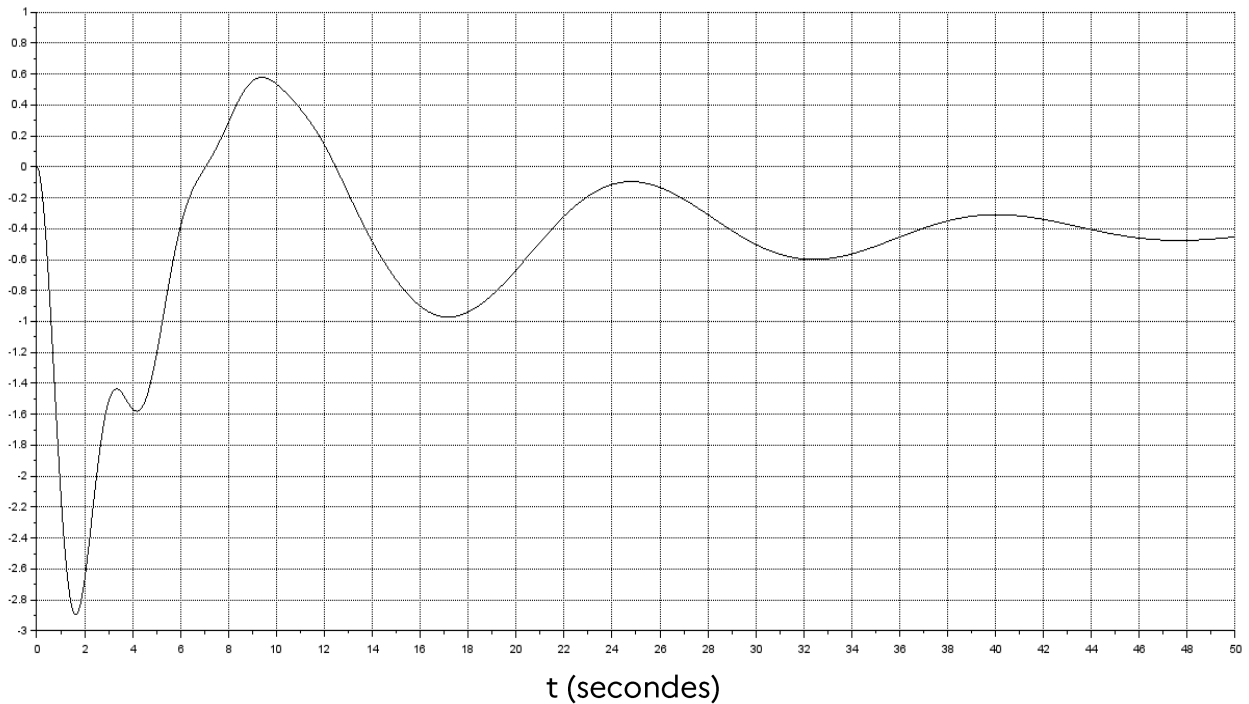
I- Avion naturel en conditions de largage (Cas de vol 4,  $M = 0,8$ ,  $H = 40\,000 \text{ ft}$ )

La Fonction de transfert reliant la profondeur  $\delta_s$  (*stabilizer*) à l'assiette ( $\theta$ ) du X-15 à sa masse au largage est :

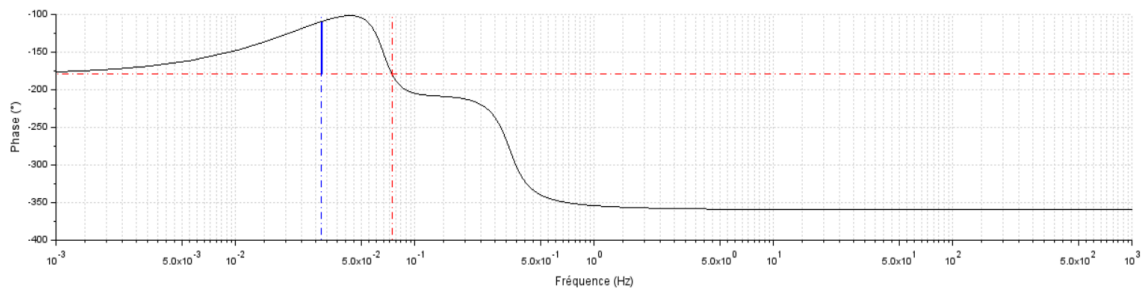
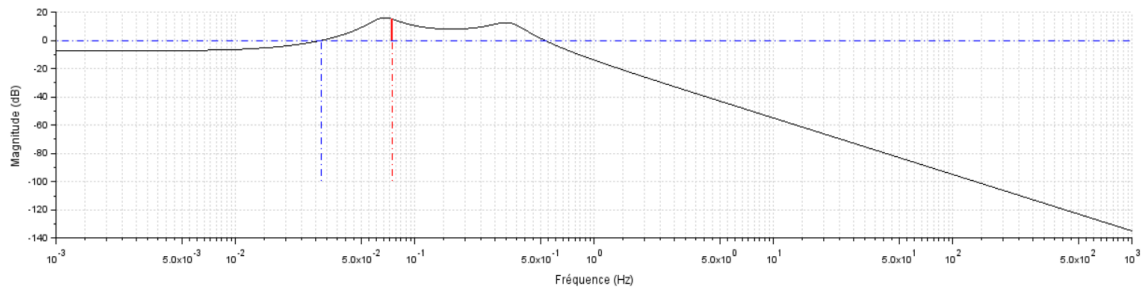
$$\frac{\theta(s)}{\delta_s(s)} = \frac{-7,02(s + 0,138)(s + 0,334)}{(s^2 + 0,145s + 0,175)(s^2 + 0,844s + 4,452)}$$

Une fois largué, le X-15 répond ainsi à un simple échelon unitaire en profondeur (1 degré) :

$\theta$  (deg)



- 1) Déterminez la période, la fréquence et la pulsation d'oscillation la plus lente (dite « phugoïde » ou « phygoïde »).
- 2) Peut-on justifier l'approximation  $\omega_{amorti} \approx \omega_{naturel}$  pour cet aéronef, sur la base de son amortissement réduit ?
- 3) A quelle valeur l'assiette va-t-elle se stabiliser pour un échelon unitaire (1°) de gouverne de profondeur ?



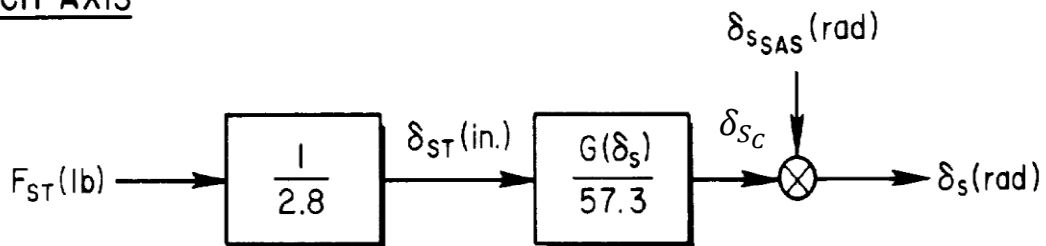
4) Le diagramme de Bode ci-dessus donne une idée de la réponse fréquentielle longitudinale du X-15 en assiette et en boucle ouverte pour le point de vol choisi.

1. Désignez sur le graphe les marges de gain et de phase et donnez leurs valeurs, ainsi que les fréquences associées.
2. Constatez le paradoxe qu'il y a lorsque l'on compare la réponse temporelle du X-15 et ses marges de gain et de phase.

## II- Stability Augmentation System ON

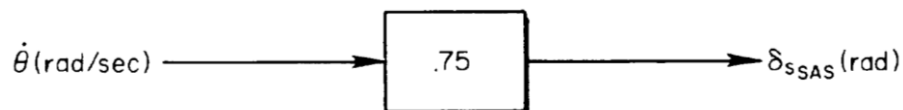
Le schéma général des commandes de vol du X-15 est constitué d'une chaîne transformant des efforts aux manches ( $F_{ST}$ ) en ordres de gouvernes commandées  $\delta_{s_c}$ , qui peuvent être « augmentées » ( $\delta_{s_{SAS}}$ ) par une boucle de rétroaction (« feedback ») améliorant la stabilité et construite à partir de la mesure de la vitesse de tangage  $q = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  par un gyromètre solidaire de la structure du véhicule aérospace (on étudiera ultérieurement la fonction  $G$ , dont le gain dépend de la déflexion effective  $\delta_s$  au moment de la prise en compte de la commande  $\delta_{s_T}$ ).

### PITCH AXIS



(in : mesure en pouces, lb : mesure en livres-forces)

### PITCH SAS

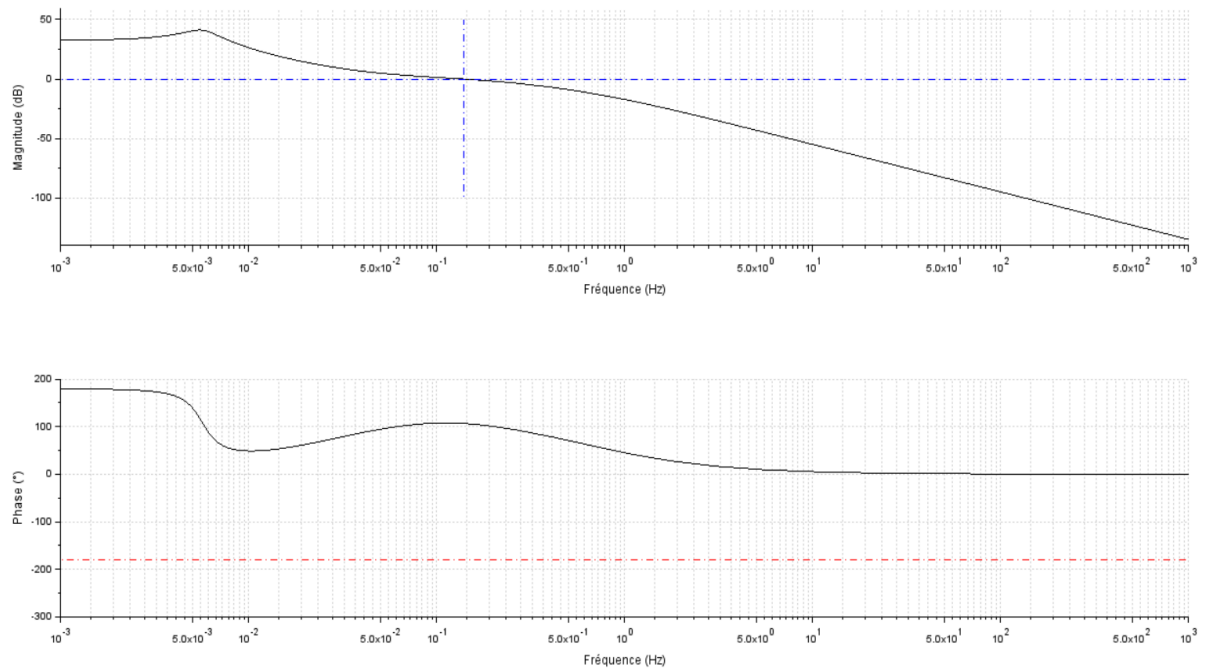


On définit la déflexion « commandée »  $\delta_{s_c}$  telle que  $\delta_s = \delta_{s_c} + \delta_{s_{SAS}}$ .

- 1) Représentez sur un schéma-bloc l'ensemble « augmenté » entre  $\delta_{s_c}$  et  $q$ .
- 2) Quelle fonction de transfert relie plus particulièrement l'entrée  $\delta_s(s)$  à la sortie  $q(s)$  ?
- 3) On s'intéresse au contrôle de l'assiette avec l'asservissement actif. La fonction de transfert résultant de cet asservissement est :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_{s_c}(s)} = \frac{-7,02(s + 0,138)(s + 0,334)}{(s^2 + 0,01335s + 0,0013)(s + 1,29)(s + 4,82)}$$

La réponse fréquentielle (superposée à la boucle ouverte pour le gain, 2 graphes de phases) est donnée ci-après :



- 4) Considérant cette réponse fréquentielle, vous semble-t-il exister (et pourquoi ; ou non) un risque d'instabilité du X-15 « augmenté » ?  
(Note : à basse fréquence, on n'atteint jamais  $+180^\circ$  de déphasage).

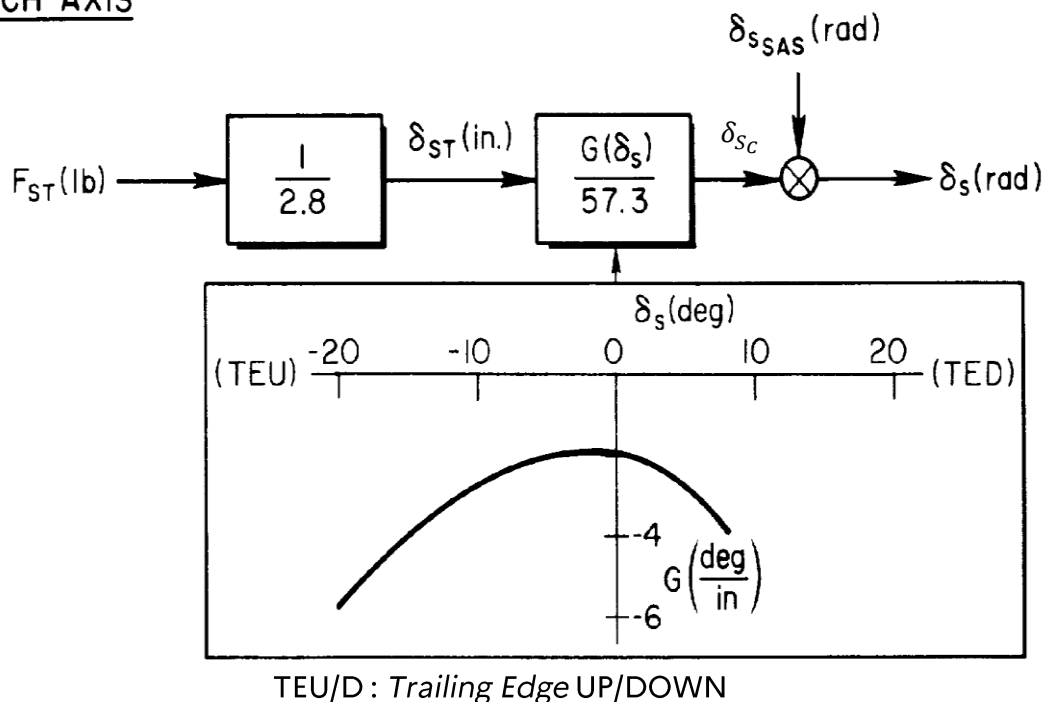
### III- Inclusion d'un pilote dans la boucle longitudinale.

Reprendre les schéma-blocs fournis et/ou créés précédemment.

- 1) En considérant le X-15 augmenté comme un simple « bloc X-15 » avec  $\delta_{s_c}$  en entrée et  $\theta$  en sortie, proposer un nouveau schéma-bloc incluant une « boîte » pilote » vu en tant que contrôleur (au sens de l'automatique) pour réaliser un maintien d'assiette  $\theta_c$ .
- 2) Quel élément mécanique peut jouer la fonction du gain  $\frac{1}{2,8}$  dans le schéma-bloc des commandes ?

La fonction G définit la déflexion commandée ( $\delta_{s_c}$  en degré) en fonction du déplacement de la commande en entrée ET de la position effective de la gouverne  $\delta_s$  au même moment.

#### PITCH AXIS



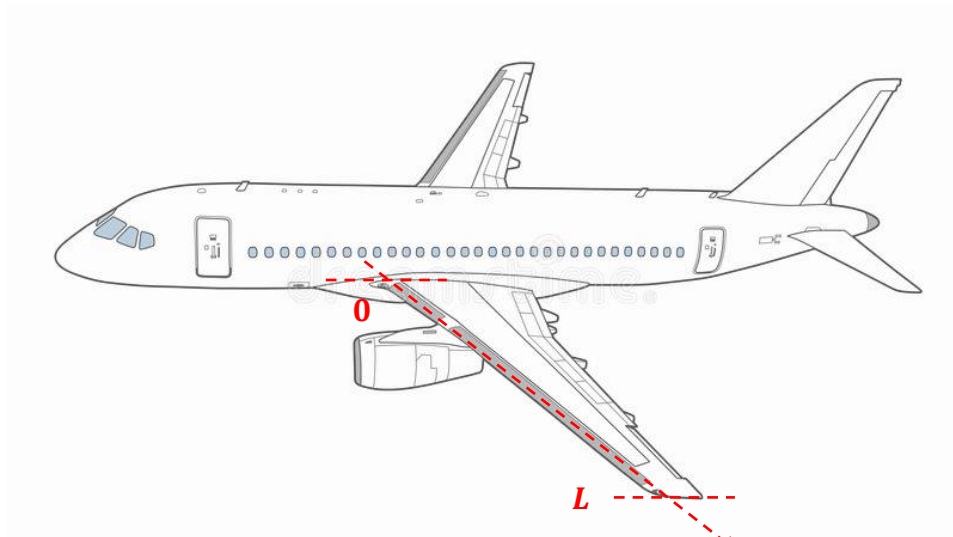
- 3) Pourquoi n'est-il en toute rigueur pas possible de trouver la fonction de transfert du système  $\frac{\theta(s)}{\theta_c(s)}$  ?

### EXERCICE 5: Système d'antigivrage des ailes d'un avion

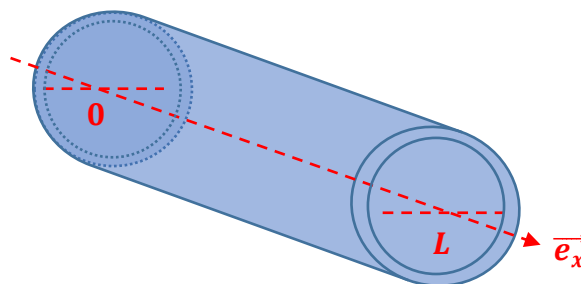
De l'air chaud ( $80^{\circ}\text{C}$ ) est prélevé au niveau des moteurs et circule dans une conduite le long du bord d'attaque des ailes, dans le but d'éviter que du givre ne se forme et ne dégrade sérieusement les performances de l'appareil.

On considère que la température de l'air est constante dans la conduite située dans le bord d'attaque.

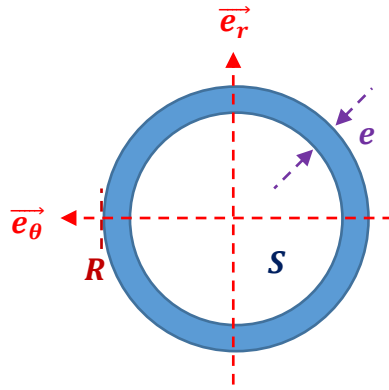
Cette conduite est assimilée à un cylindre de rayon  $R = 3\text{ cm}$  et de longueur  $L$ .



*Dispositif d'antigivrage sur aile d'avion.*

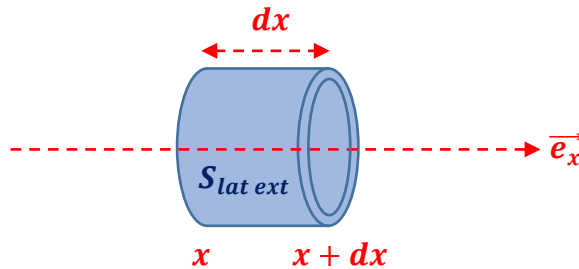


*Conduite dans laquelle s'écoule l'air chaud.*



Tuyau de la conduite vu de face.  
 La surface  $S$  est la section de la conduite laissée à l'air pour circuler.  
 L'épaisseur du tuyau est  $e = 2 \text{ mm}$ .

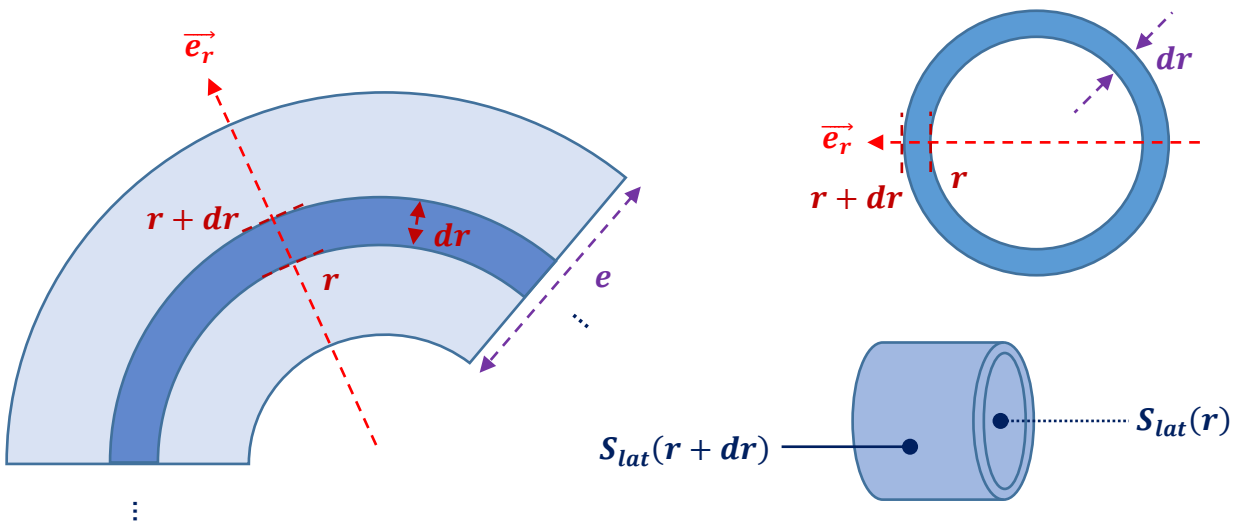
Nous allons concentrer notre étude sur une portion de la conduite, définie par sa longueur  $dx$  :



Portion de conduite, située à une distance  $x$  de l'emplanture de l'aile.

La surface latérale extérieure de cette portion de conduite (par laquelle la chaleur transite) est appelée  $S_{lat \ ext}$ .

Et nous allons encore diviser cette portion en plusieurs cylindres d'épaisseur  $dr$ , pour  $r$  tel que  $R > r > R - e$  :





On va supposer que l'échange de chaleur s'effectue au travers de la moitié avant de la conduite du bord d'attaque :



*Profil de l'aile, avec la conduite au niveau du bord d'attaque.*

*Le demi-cylindre avant permet l'échange de chaleur entre l'air circulant dans la conduite et l'air extérieur.*

*On suppose en revanche qu'aucun échange de chaleur ne se fera au travers du demi-cylindre arrière.*

Nous voulons étudier l'échange de chaleur entre l'air circulant dans la conduite et l'air extérieur. On supposera que le bord d'attaque est la surface latérale extérieure de la conduite. Il va donc falloir étudier le transfert d'énergie thermique qui s'opère au travers du tuyau de notre portion de conduite.

Pour cela, nous allons d'abord évaluer la variation d'énergie interne de notre système qui sera le morceau de tuyau d'épaisseur  $dr$  et longueur  $dx$  de la conduite, comme décrit précédemment.

Nous écrirons donc l'énergie interne  $U$  de notre système, le travail  $W$  qu'il reçoit ou donne au milieu extérieur, et les échanges d'énergie thermique  $Q$  avec le milieu extérieur.

- 1- Rappelez le premier principe de la thermodynamique, et l'unité des paramètres en jeu.
- 2- Donnez en fonction de  $r$  et  $dx$ , l'expression de la surface par laquelle le transfert d'énergie thermique se fera, et que l'on appellera **surface d'échange**  $S_{ech}(r)$ .

Le flux thermique  $\varphi_r$  au travers de la surface d'échange  $S_{ech}(r)$  est défini par :

$$\varphi_r(t) = \frac{dQ}{dt}$$

- 3- Quelle est l'unité de  $\varphi_r$  ?

On définit le vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_{th}(r, t)$ , comme suit :

$$\varphi_r(t) = \vec{j}_{th}(r, t) \cdot S_{ech}(r) \cdot \vec{e}_r = j_{th}(r, t) \cdot S_{ech}(r)$$

- 4- Quelle est l'unité de  $j_{th}$  ? Qu'exprime-t-il ?  
Etant donné l'objectif de notre système antigivrage, a-t-on plutôt intérêt à avoir une forte densité de flux thermique ou pas ?
- 5- Sachant que notre système n'est soumis à aucune force du milieu extérieur, et inversement n'en exerce aucune, donnez la relation entre son énergie interne et la quantité d'échange d'énergie thermique.

On écrit donc, entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$U(t + dt) - U(t) = \varphi_r(t)dt - \varphi_{r+dr}(t)dt$$

- 6- Expliquez physiquement cette relation.

Pour la suite, on considérera que  $S_{ech}(r + dr) \approx S_{ech}(r)$ .

- 7- Montrez rapidement que :

$$\varphi_r(t)dt - \varphi_{r+dr}(t)dt = [j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)]S_{ech}(r)dt$$

- 8- Donnez l'expression de l'énergie interne  $U$  de notre système, en fonction de l'énergie interne volumique  $u$  ( $J \cdot m^{-3}$ ),  $S_{ech}(r)$  et  $dr$ .
- 9- Sachant que :

$$U(t + dt) - U(t) = \frac{dU}{dt} dt$$

Montrez que :

$$\frac{du}{dt} = \frac{j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)}{dr}$$

Il est possible de définir autrement la densité de flux thermique :

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

Où  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau constituant le tuyau, et  $T$  sa température en Kelvin.

- 10- Donnez l'unité de la conductivité thermique, ainsi que son sens physique.
- 11- Comment évolue la température du matériau de notre tuyau avec  $r$  ?  
En déduire le signe de  $j_{th}$ . Que cela traduit-il physiquement ?

12- Compte-tenu de l'objectif de notre système d'antigivrage, quel matériau entre l'aluminium et le fer est à privilégier ?

Données :  $\lambda_{alu} = 226 \text{ SI}$  et  $\lambda_{fer} = 72 \text{ SI}$ .

Finalement, on peut écrire une équation sur la température du tuyau le long de son épaisseur  $e$ , et en fonction du temps si les conditions extérieures sont variables :

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \frac{d^2T}{dr^2}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $c$  sa capacité thermique massique.

Et où l'on a écrit :

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{d\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dr}$$

13- Donnez l'unité de  $c$ .

14- On se place dans des conditions non variables dans le temps. L'air extérieur est à  $5^\circ\text{C}$ . La température du tuyau ne dépend donc plus du temps, mais seulement de  $r$ .

15- Donnez le profil d'évolution de la température du tuyau en fonction de  $r$ .

16- Calculez  $\frac{dT}{dr}$ .

17- Montrez que dans ce cas, la densité de flux thermique  $j_{th}$  ne dépend pas de  $r$ , et donnez sa valeur en considérant le matériau le plus adapté entre aluminium et fer.

18- En déduire la valeur du flux thermique traversant la surface d'échange extérieure  $S_{ech}(R)$  de la portion de tuyau de longueur  $dx$ .

Donnée :  $dx = 2 \text{ cm}$ .

19- Si l'on avait choisi le matériau le moins adapté, quelle aurait été la valeur du flux thermique ? En quoi est-ce moins bien ?

20- Le système d'antigivrage n'est toutefois pas aussi efficace en pratique, quelles sont les hypothèses optimistes faites en début d'exercice ?

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

-----

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »

-----

SESSION DU 15 NOVEMBRE 2021

-----

**CORRIGÉ ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES**

---

Durée: 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée --  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur ce document

Document validé par :

Nom :

Date : 05/11/2021

Signature :

## EXERCICE 1: Analyse dimensionnelle

Le nombre de Bansen  $Ba$  est un nombre sans dimension utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert d'énergie thermique par radiation et le transfert par convection.

On le définit de la manière suivante :

$$Ba = \frac{h_r S}{F c_p}$$

Avec :

- $h_r$  : le coefficient de transfert thermique par radiation

- $S$  : la surface de transfert

- $F$  : le débit massique

- $c_p$  : la capacité thermique, qui représente la quantité d'énergie thermique que l'on doit transférer à un corps pour augmenter sa température. Sa valeur est donc l'énergie à apporter à un kilogramme de ce corps pour augmenter sa température d'un Kelvin.

(Source : Wikipédia)

Donnez l'unité de  $h_r$ .

On a les unités des différents paramètres :

$$[S] = m^2$$

$$[F] = kg \cdot s^{-1}$$

$$[c_p] = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$$

Sachant que :

$$[Ba] = \left[ \frac{h_r S}{F c_p} \right] = 1$$

Donc on retrouve l'unité du coefficient de transfert thermique :

$$[h_r] = \left[ \frac{F c_p}{S} \right] = \frac{(kg \cdot s^{-1}) \cdot (J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1})}{m^2} = \frac{J \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}}{m^2} = J \cdot K^{-1} \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$$

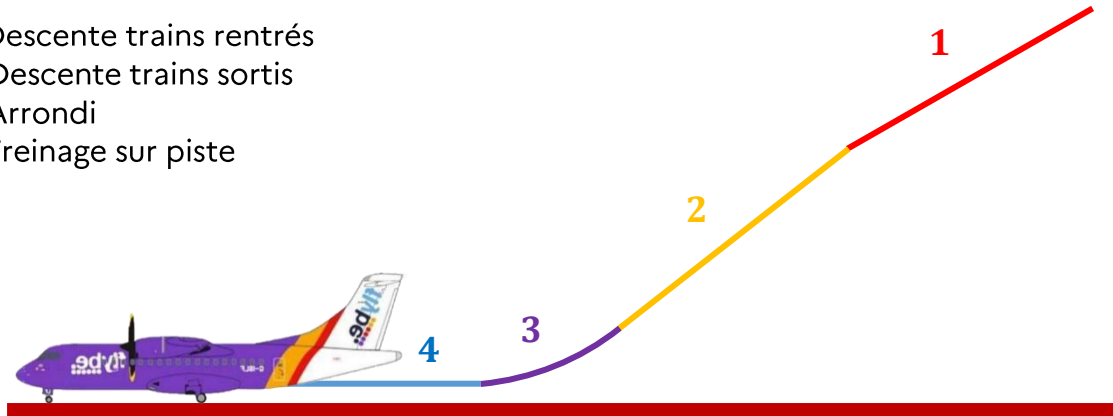
Ou :

$$[h_r] = W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$$

## EXERCICE 2 : Avion à l'atterrissage

On s'intéresse à l'atterrissage d'un avion de ligne type ATR 42.  
Pour se faire, on décomposera l'étude en quatre phases :

- 1-Descente trains rentrés
- 2-Descente trains sortis
- 3-Arrondi
- 4-Freinage sur piste



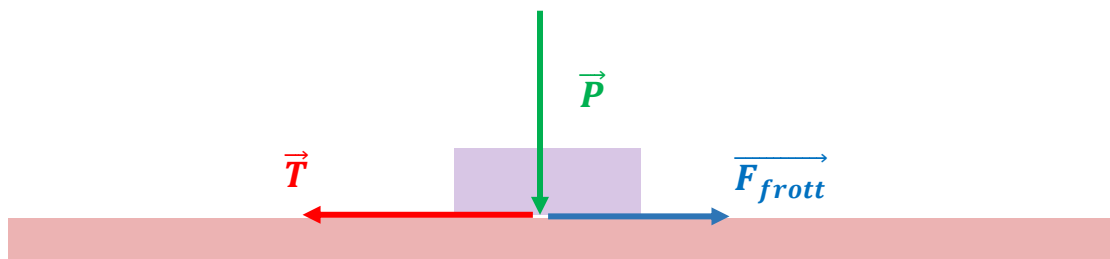
On dispose des données suivantes :

- Masse :  $m = 10\,000\text{ kg}$
- Surface alaire :  $S = 54,5\text{ m}^2$
- Surface fuselage (vue de face) :  $S_{fus} = 7\text{ m}^2$
- Surface trains (vue de face) :  $S_{trains} = 0,5\text{ m}^2$
- Coefficient de traînée du fuselage :  $C_{x\,fus} = 0,8$
- Coefficient de traînée des trains :  $C_{x\,trains} = 1$
- Calage des ailes :  $\varepsilon = 1,5^\circ$
- Densité de l'air :  $\rho = 1,225\text{ kg/m}^3$

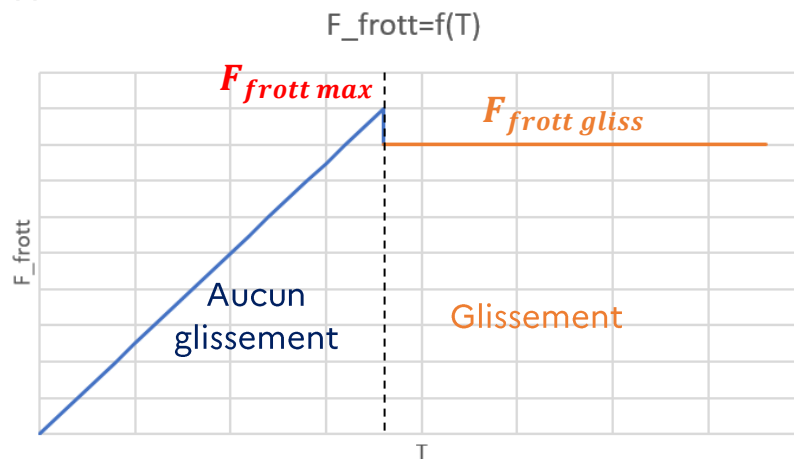
-Coefficient d'adhérence des roues au sol :

Le module de la force de frottement  $\vec{F}_{frott}$  s'exerçant sur un objet d'un certain poids  $\vec{P}$ , soumis à une force qui le tracte  $\vec{T}$ , s'écrit :

$$F_{frott} = f \cdot P$$



Avec le coefficient d'adhérence  $f$ . On a l'évolution de  $F_{frott}$  en fonction du module de la force tractrice  $\vec{T}$  :



Tant que  $T \leq F_{frott max} = f_s P$ , l'objet ne glisse pas par rapport au sol.

Ensuite,  $F_{frott} = F_{frott gliss} = f_c \cdot P$

Pour la piste d'atterrissage dans notre exercice, on prendra  $f_s = 0,9$  et  $f_c = 0,8$ .

On définit le bilan des forces, ainsi que les trois repères Terre, fuselage et air :

-Centre de gravité de l'avion :  $G$

-Repère Terre  $R_0 : (G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , l'axe  $\vec{y}_0$  étant perpendiculaire à la feuille, et orienté vers la table

-Repère fuselage  $R_f : (G, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$ , l'axe  $\vec{y}_f$  étant confondu avec  $\vec{y}_0$

-Repère air  $R : (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , l'axe  $\vec{y}$  étant confondu avec  $\vec{y}_0$

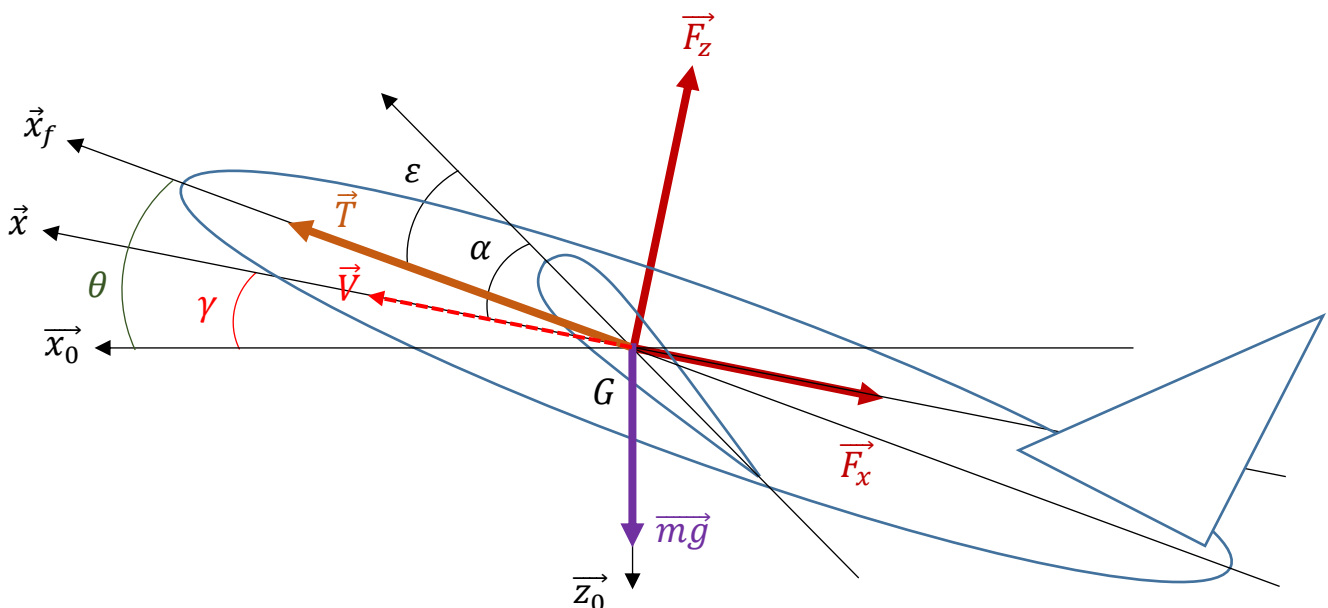
Les angles utilisés sont tous positifs sur le schéma ci-dessous, et sont appelés :

-Angle d'incidence de l'aile :  $\alpha$

-Angle de calage de l'aile :  $\varepsilon$

-Assiette fuselage :  $\theta$

-Pente de la trajectoire :  $\gamma$



On écrit les forces s'exerçant sur l'avion (que l'on suppose toutes s'appliquer en G) :

-La poussée des deux moteurs :

$$\vec{T} = T \cdot \vec{x}_f$$

-Le poids de l'avion :

$$\vec{m}g = mg \cdot \vec{z}_0$$

Avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

-La portance des ailes :

$$\vec{F}_z = -F_z \cdot \vec{z} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_z \cdot \vec{z}$$

Avec :

$$C_z = A \alpha$$

Sachant que  $A = 0,1 \text{ deg}^{-1}$ .

-La traînée de l'avion trains sortis :

$$\vec{F}_x = -F_x \cdot \vec{x} = -(F_{x \text{ aile}} + F_{x \text{ fus}} + F_{x \text{ trains}}) \cdot \vec{x} = -\frac{1}{2} \rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{x \text{ fus}} + S_{trains} C_{x \text{ trains}}) \cdot \vec{x}$$

Avec :

$$C_x = C_{x0} + k C_z^2$$

Sachant que  $C_{x0} = 0,015$  et  $k = 0,03$ .

#### Conventions :

On écrira pour un vecteur  $\vec{X}$  quelconque projeté dans le repère Terre :

$$\vec{X} = a_0 \vec{x}_0 + b_0 \vec{y}_0 + c_0 \vec{z}_0$$

Soit sous forme matricielle :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Pour la vitesse on définit le nom des coordonnées :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \\ V_{z0} \end{pmatrix}_{R_0}$$

Et on a :

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + V_{z0}^2}$$

On écrira la dérivée du vecteur vitesse par rapport au repère Terre, projetée dans le repère Terre :

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_0}$$



## I- Etablissement des équations

Nous allons étudier le mouvement de l'avion par rapport au sol en écrivant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) projeté dans le repère Terre :

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R_0} = (\overline{mg})_{R_0} + (\overline{F_z})_{R_0} + (\overline{F_x})_{R_0} + (\overline{T})_{R_0}$$

Où par exemple  $(\overline{mg})_{R_0}$  représente la projection du vecteur  $\overline{mg}$  dans le repère Terre  $R_0$ .

- a. Donnez l'expression de la projection de  $\vec{V}$  dans le repère Terre sous forme matricielle  $(\vec{V})_{R_0}$ .

On décompose simplement le vecteur vitesse dans le repère terrestre (rotation d'un angle  $\gamma$ ) :

$$\vec{V} = V_{x0}\vec{x}_0 + V_{y0}\vec{y}_0 + V_{z0}\vec{z}_0 = V\cos\gamma.\vec{x}_0 - V\sin\gamma.\vec{z}_0$$

Ou sous forme matricielle :

$$(\vec{V})_{R_0} = \begin{pmatrix} V_{x0} = V\cos\gamma \\ 0 \\ V_{z0} = -V\sin\gamma \end{pmatrix}_{R_0}$$

- b. Ecrivez les équations données par le PFD.

On s'intéresse aux mouvements de l'avion dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$ . On projette donc les équations du PFD suivant ces axes, ce qui nous donne deux équations :

$$m \frac{dV_{z0}}{dt} = mg - T\sin\theta - F_z\cos\gamma + F_x\sin\gamma \quad (1)$$

$$m \frac{dV_{x0}}{dt} = T\cos\theta - F_z\sin\gamma - F_x\cos\gamma \quad (2)$$

- c. Donnez la relation qui lie les angles  $\alpha, \varepsilon, \gamma$  et  $\theta$ .

D'après le schéma donné en introduction, on a la relation qui lie les angles :

$$\theta + \varepsilon = \alpha + \gamma \quad (3)$$

Remarque :

On complète donc notre système d'équations avec :

$$F_z = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_z \quad (4)$$

$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{x fus} + S_{trains} C_{x trains}) \quad (5)$$

$$V_{x0} = V \cos \gamma \quad (6)$$

$$V_{z0} = -V \sin \gamma \quad (7)$$

On a ainsi 7 équations pour 7 inconnues :  $T, F_z, F_x, \theta, \alpha, V, \gamma$ .

## II- Descente trains rentrés

L'avion suit une trajectoire rectiligne et le pilote sait, d'après les indications à bord, que les composantes de vitesse par rapport au sol sont constantes et valent :

$$V_{x0} = 250 \text{ km/h et } V_{z0} = 10 \text{ km/h}$$

- a. Donnez la valeur de  $\gamma$  **en vous aidant du tableau du cosinus et sinus donné en annexe.**

On sait que :

$$V_{x0} = V \cos \gamma \quad (6)$$

$$V_{z0} = -V \sin \gamma \quad (7)$$

Donc :

$$\sqrt{V_{x0}^2 + V_{z0}^2} = V$$

Soit :

$$V = \sqrt{250^2 + 10^2} = 250,199 \text{ km/h}$$

Ensuite :

$$\cos \gamma = \frac{V_{x0}}{V} = \frac{250}{250,199} = 0,999$$

$$\sin \gamma = -\frac{V_{z0}}{V} = -\frac{10}{250,199} = -0,040$$

Ce qui correspond, grâce au tableau, à  $\gamma = -0,04$ .

Donc la pente vaut :

$$\gamma = -0,04 \frac{360}{2\pi} = -2,29^\circ$$

- b. En reprenant les équations du PFD, et en supposant que les composantes projetées sur l'axe vertical terrestre de la traînée  $F_x$  et de la poussée des moteurs  $T$  sont négligeables, calculez l'incidence  $\alpha$  des ailes.

L'équation du PFD selon l'axe  $\vec{z}_0$  (à l'équilibre:  $V_{z0} = cste$ ) s'écrit, avec ces simplifications:

$$0 = mg - T \sin \theta - F_z \cos \gamma + F_x \sin \gamma \approx mg - F_z \cos \gamma \quad (1)$$

Donc :

$$F_z = \frac{mg}{\cos \gamma} = \frac{10\,000 \cdot 9,81}{0,999} = 98\,178 \text{ N}$$

Ensuite, pour déterminer l'incidence des ailes, on utilise la formule de portance :

$$F_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 A \alpha \quad (4)$$

Avec :

$$A = 0,1 \text{ deg}^{-1}$$

Soit une incidence :

$$\alpha = \frac{2F_z}{\rho S V^2 A} = \frac{2 \cdot 98\,178}{1,225 \cdot 54,5 \left(\frac{250}{3,6}\right)^2 \cdot 0,1} = 6,09^\circ$$

- c. En déduire l'assiette  $\theta$  de l'avion.

On utilise la formule reliant tous les angles :

$$\theta + \varepsilon = \alpha + \gamma \quad (3)$$

Pour trouver l'assiette de l'avion :

$$\theta = \alpha + \gamma - \varepsilon = 6,09 - 2,29 - 1,5 = 2,3^\circ$$

- d. Calculez la traînée de l'avion.

On utilise la formule de la traînée trains rentrés :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{x_{fus}}) \quad (5)$$

Avec :

$$C_x = C_{x0} + k C_z^2$$

Sachant que  $C_{x0} = 0,015$  et  $k = 0,03$ .

Ainsi :

$$C_x = 0,015 + 0,03 \cdot (0,16,09)^2 = 0,026$$

Et donc :

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot \left(\frac{250}{3,6}\right)^2 (54,5 \cdot 0,026 + 7,0,8) = 4\,212 + 16\,568 = 20\,780 \text{ N}$$

e. En déduire la poussée  $T$  des moteurs.

On utilise la dernière équation de notre système, qui est l'équation du PFD selon l'axe  $\vec{x}_0$  (en sachant que l'avion est à l'équilibre :  $V_{x0} = \text{cste}$ ) :

$$0 = T \cos \theta - F_z \sin \gamma - F_x \cos \gamma \quad (2)$$

Soit une poussée :

$$T = \frac{F_z \sin \gamma + F_x \cos \gamma}{\cos \theta} = \frac{98\,178 \cdot (-0,039) + 20\,780 \cdot 0,999}{\cos\left(2,3 \frac{2\pi}{360}\right)} = 16\,853 \text{ N}$$

### III- Descente trains sortis

Le pilote sort les trains, mais ne modifie pas la poussée des moteurs. Il laisse l'avion se stabiliser de nouveau à une nouvelle vitesse.

On a désormais :

$$V_{x0} = 220 \text{ km/h et } V_{z0} = 30 \text{ km/h}$$

a. Calculez la nouvelle incidence des ailes.

Tout d'abord, on doit nécessairement calculer la pente de l'avion puisqu'elle intervient dans toutes les formules qui nous permettent de trouver l'incidence des ailes. Donc on utilise :

$$V_{x0} = V \cos \gamma \quad (6)$$

$$V_{z0} = -V \sin \gamma \quad (7)$$

Ainsi :

$$\sqrt{V_{x0}^2 + V_{z0}^2} = V$$

Soit :

$$V = \sqrt{220^2 + 30^2} = 222,036 \text{ km/h}$$

Ensuite :

$$\cos\gamma = \frac{V_{x0}}{V} = \frac{220}{222,036} = 0,991$$

$$\sin\gamma = -\frac{V_{z0}}{V} = -\frac{30}{222,036} = -0,135$$

Ce qui correspond, grâce au tableau, à  $\gamma = -0,135$ .

Donc la pente de l'avion est :

$$\gamma = -0,135 \frac{360}{2\pi} = -7,77^\circ$$

Ensuite, si l'on utilise la formule reliant les angles (3), on doit connaître l'assiette pour trouver l'incidence, ce qui complexifie le calcul.

Mais si l'on utilise le PFD selon l'axe vertical (1), en supposant toujours que les projections de poussée et trainée sont faibles par rapport à celles du poids et de la portance, on a directement :

$$0 \approx mg - F_z \cos\gamma \quad (1)$$

Soit :

$$F_z = \frac{mg}{\cos\gamma} = \frac{10\,000 \cdot 9,81}{0,991} = 99\,008 \text{ N}$$

Et ensuite on a :

$$F_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 A \alpha \quad (4)$$

Soit une incidence :

$$\alpha = \frac{2F_z}{\rho S V^2 A} = \frac{2 \cdot 99\,008}{1,225 \cdot 54,5 \left(\frac{222}{3,6}\right)^2 \cdot 0,1} = 7,8^\circ$$

- b. Calculez la trainée de l'avion, ainsi que la poussée affichée par les moteurs.

On calcule la trainée en considérant cette fois la trainée additionnelle due aux trains sortis :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{xfus} + S_{trains} C_{xtrains})$$

Avec :

$$C_x = 0,015 + 0,03 \cdot (0,1)^2 \cdot (7,8)^2 = 0,033$$

Soit :

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot \left(\frac{168}{3,6}\right)^2 (54,5 \cdot 0,033 + 7 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 1) = 4\,221 + 13\,048 + 1\,165 = 18\,433 \text{ N}$$

Enfin on utilise l'équation du PFD suivant l'axe horizontal pour trouver la poussée :

$$0 = T \cos \theta - F_z \sin \gamma - F_x \cos \gamma \quad (2)$$

Avec :

$$\theta + \varepsilon = \alpha + \gamma \quad (3)$$

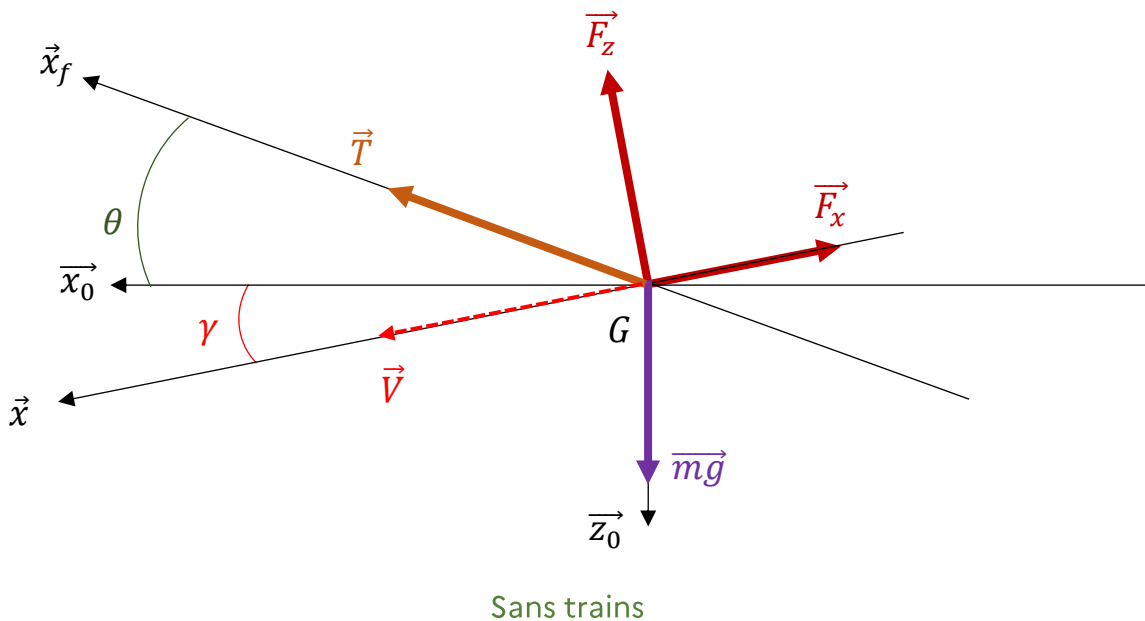
$$\theta = \alpha + \gamma - \varepsilon = 6,09 - 7,77 - 1,5 = -1,47^\circ$$

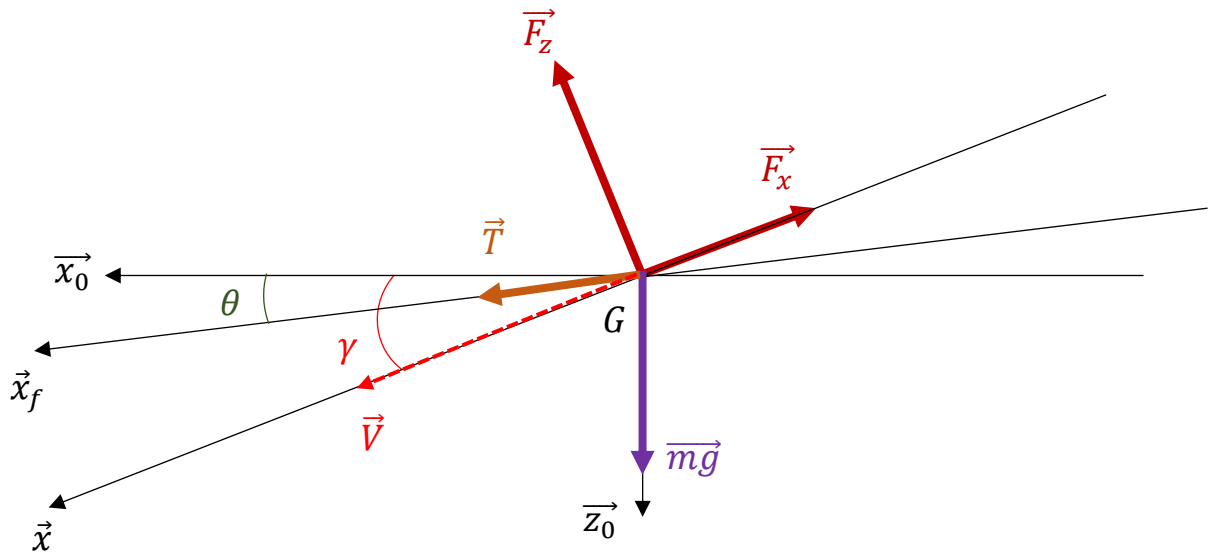
Soit :

$$T = \frac{F_z \sin \gamma + F_x \cos \gamma}{\cos \theta} = \frac{99\,008 \cdot (-0,135) + 18\,433,0991}{\cos\left(-1,47 \frac{2\pi}{360}\right)} = 4\,889 \text{ N}$$

- c. Faites un bilan rapide des résultats obtenus dans les cas sans et avec trains.  
Expliquez brièvement comment les forces s'organisent pour assurer l'équilibre de l'avion dans chaque cas.

On peut faire les schémas des forces (pas à l'échelle) avec et sans trains :





Avec trains

Dans les deux cas nous avons :

$V$	$\gamma$	$\alpha$	$\theta$	$T$	$F_z$	$F_x$
250 km/h	$-2,29^\circ$	$6,09^\circ$	$2,3^\circ$	16 853 N	98 178 N	20 780 N
222 km/h	$-7,77^\circ$	$7,8^\circ$	$-1,47^\circ$	4 889 N	99 008 N	18 433 N

Les angles :

Puisque la vitesse verticale augmente et la vitesse horizontale diminue, la pente augmente (en descente), mais la différence de vitesse entre trains rentrés et sortis ne nécessite pas une variation importante d'incidence des ailes, d'où le fait que l'assiette soit devenue à piquer.

Suivant l'axe horizontal terrestre :

La vitesse de l'avion diminue à la sortie des trains, ce qui entraîne une diminution de la traînée du fuselage ( $F_{x\ fus} : 16\ 570 \rightarrow 13\ 050\ N$ ), et ce qui oblige les ailes à voir leur incidence légèrement augmenter pour toujours contrer le poids. Globalement la traînée des ailes reste stable entre la perte de vitesse et la prise d'incidence ( $F_{x\ ailes} : 4\ 210 \rightarrow 4\ 220\ N$ ).

Les trains sortis ajoutent une traînée de  $F_{x\ trains} = 1\ 165\ N$ .

Globalement la traînée de l'avion diminue à cause de la baisse de traînée fuselage entraînée par la réduction de vitesse.

De plus, l'assiette étant plus à piquer, la portance des ailes génèrent un effort plus vers l'avant, ainsi il apparaît que l'équilibre des forces selon l'axe horizontal terrestre s'établit pour une poussée moteurs beaucoup plus faible qu'avant.

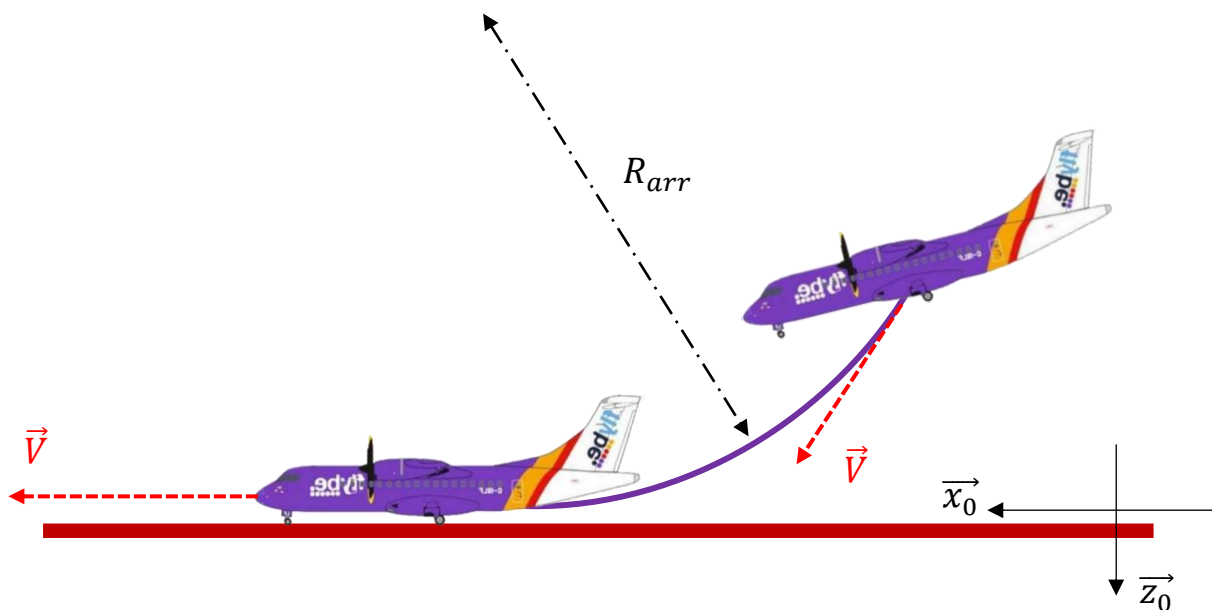
Suivant l'axe vertical terrestre :

La traînée diminue mais elle est plus orientée vers le haut, tandis que la poussée des moteurs diminue mais est plus orientée vers le bas. Finalement, l'équilibre des forces suivant l'axe vertical s'obtient pour une portance à peu près égale.

#### IV- Arrondi

On suppose que lors de l'arrondi (trajectoire circulaire de rayon  $R_{arr} = 2\,000\text{ m}$ ), la vitesse de l'avion est constante et vaut la vitesse totale précédemment calculée moins  $50\text{ km/h}$  (décélération due à la sortie d'aérofreins).

Le pilote débute son arrondi avec la pente précédemment calculée (trains sortis), et le termine lorsque l'avion est complètement posé au sol.



a. Calculez la durée de l'arrondi  $t_{arr}$ .

On a la formule qui relie vitesse linéaire et vitesse de rotation pour une trajectoire circulaire :

$$V = R_{arr} \frac{d\gamma}{dt} = R_{arr} \frac{\Delta\gamma}{t_{arr}} = R_{arr} \frac{-\gamma}{t_{arr}}$$

La pente au début de l'arrondi vaut  $\gamma = -7,77^\circ$  et à la fin  $0^\circ$ . Le temps que met l'avion pour effectuer l'arrondi (parcourir la distance  $-R_{arr}\gamma$ ) est  $t_{arr}$ .

Soit :

$$t_{arr} = R_{arr} \frac{-\gamma}{V} = 2\,000 \frac{7,77 \frac{2\pi}{360}}{222 - 50} = 5,67\text{ s}$$



- b. Déterminez l'incidence des ailes au cours de l'arrondi (on supposera la pente faible :  $\cos\gamma \approx 1$  et on néglige l'influence des moteurs).

On s'intéresse au mouvement de l'avion dans le repère air ( $R$ ) cette fois. Il faut donc écrire le PFD comme suit :

$$m \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_0}^R = (\overline{mg})_R + (\overline{F_z})_R + (\overline{F_x})_R + (\overline{T})_R$$

Avec la composition des accélérations :

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_0}^R = \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_R + \overline{\Omega_{R/R_0}} \wedge \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_R = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\gamma}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -V \frac{d\gamma}{dt} \end{pmatrix}_R$$

Ce terme correspond en fait à l'accélération d'inertie d'entraînement représentant la force centrifuge.

Donc, suivant l'axe verticale  $\vec{z}$  on a :

$$-mV \frac{d\gamma}{dt} = mg \cdot \cos\gamma - F_z - T \sin(\gamma - \theta) \approx mg - F_z$$

$$F_z = mg + mV \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \rho S V^2 C_z = mg + mV \left( \frac{-\gamma}{t_{arr}} \right)$$

$$\alpha = \frac{2}{\rho S V^2 A} \left[ mg + mV \left( \frac{-\gamma}{t_{arr}} \right) \right]$$

Soit finalement :

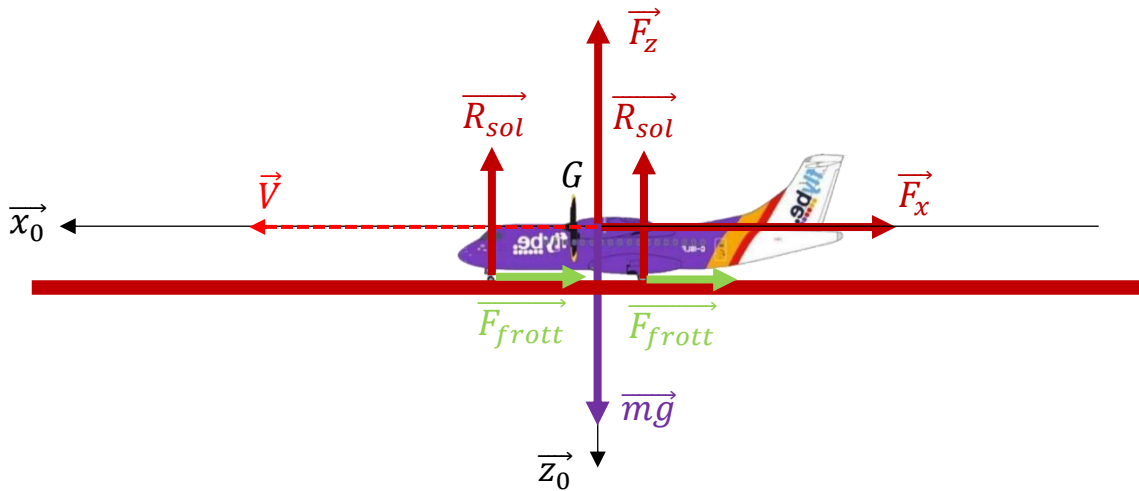
$$\alpha = \frac{2}{1,225 \cdot 54,5 \cdot \left( \frac{222 - 50}{3,6} \right)^2 \cdot 0,1} \left[ 10\,000 \cdot 9,81 + 10\,000 \cdot \left( \frac{222 - 50}{3,6} \right) \left( \frac{-7,77 \frac{2\pi}{360}}{5,67} \right) \right] = 14,37^\circ$$

## V- Freinage sur piste

Une fois sur la piste, le pilote coupe la poussée des moteurs et rentre les aérofreins.

- Faites un schéma avec le bilan des forces, une fois que l'avion est en train de freiner sur la piste (le pilote actionne les freins). On considérera que le train d'atterrissage de l'avion est constitué de trois roues (une à l'avant, deux à l'arrière : on supposera une répartition du poids égale entre chaque roue).

On a le schéma suivant :



La portance est remplacée petit à petit par la réaction du sol. L'incidence des ailes est égale au calage  $\varepsilon$ .

- Calculez la portance des ailes au début de la décélération et justifiez que l'on puisse la négliger dans notre étude.

On a la portance au début de la décélération qui vaut :

$$F_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 A \alpha$$

En sachant que :

$$\alpha = \varepsilon = 1,5^\circ$$

$$V = 222 - 50 = 172 \text{ km/h}$$

Donc :

$$F_z = \frac{1}{2} 1,225.54,5. \left( \frac{172}{3,6} \right)^2 . 0,1.1,5 = 11\,435 \text{ N}$$

Comparée au poids :

$$mg = 10\,000 \cdot 9,81 = 98\,100\text{ N}$$

On pourra simplifier notre étude en considérant qu'elle est négligeable, d'autant plus que la vitesse va diminuer au cours de la décélération, donc la portance aussi...

- c. Donnez l'expression de la force de frottement  $\vec{F}_{frott}$  s'exerçant sur chaque roue en fonction du poids de l'avion et du coefficient d'adhérence des roues au sol.

Chaque roue supporte le tiers du poids de l'appareil, et est donc soumise à une force de frottement orientée vers l'arrière, et de norme :

$$F_{frott} = f \cdot R_{sol} = f \cdot \frac{mg}{3}$$

Soit :

$$\vec{F}_{frott} = -f \cdot \frac{mg}{3} \vec{x}_0$$

- d. Donnez l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse  $V$ . Est-il possible de la résoudre simplement ? Pourquoi ?

On écrit le PFD suivant l'axe horizontal terrestre :

$$m \frac{dV}{dt} = -F_x + 3F_{frott} = -(F_{x\ aile} + F_{x\ fus} + F_{x\ trains}) - f \cdot mg$$

Soit :

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} \rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{xfus} + S_{trains} C_{x\ trains}) - f \cdot mg$$

Qui est donc une équation différentielle de la forme :

$$m \frac{dV}{dt} = -k_2 V^2 + k_1$$

Avec  $k_2$  et  $k_1$  des constantes.

On a un terme en  $V^2$ , ce qui signifie que l'équation n'est pas linéaire et donc simple à résoudre.

- e. On se propose de simplifier le terme de traînée. On va faire l'approximation que la dépendance en  $V$  est linéaire :  $F_x = KV$  avec  $K$  une constante.

Calculez la traînée de l'avion au tout début de la décélération. En déduire la valeur de  $K$  (et son unité) la plus cohérente pour notre étude.

On a la traînée de l'avion au début de la décélération qui vaut :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 (S C_x + S_{fus} C_{x fus} + S_{trains} C_{x trains})$$

Avec :

$$C_x = 0,015 + 0,03 \cdot (0,1)^2 \cdot (1,5)^2 = 0,016$$

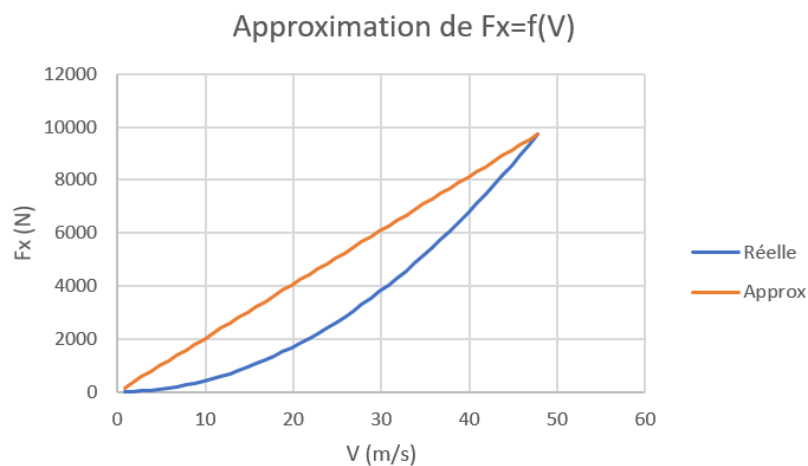
Donc :

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot \left(\frac{172}{3,6}\right)^2 (54,5 \cdot 0,016 + 7,0,8 + 0,5 \cdot 1) = 9\,727 \text{ N}$$

Donc on calcule la constante  $K$  :

$$K = \frac{F_x}{V} = \frac{9\,727}{\frac{172}{3,6}} = 203,55 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Graphiquement cela donne :



- f. On considère que le pilote freine de telle sorte que les roues soient bloquées tout le temps de la décélération.  
Calculez le temps de freinage.

Tant que l'avion n'est pas complètement arrêté (vitesse nulle), les roues (bloquées) glissent par rapport au sol ( $f = f_c$ ) et on a le PFD suivant l'horizon :

$$m \frac{dV}{dt} = -KV - f_c \cdot mg$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{K}{m}V = -f_c g$$

Soit :

$$V(t) = k_1 e^{-\frac{K}{m}t} + k_2$$

En sachant que :

$$V(t = 0) = V \rightarrow k_1 + k_2 = V$$

Et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = k_2 = -\frac{f_c \cdot mg}{K}$$

Donc :

$$k_1 = V + \frac{f_c \cdot mg}{K}$$

Et finalement :

$$V(t) = \left( V + \frac{f_c \cdot mg}{K} \right) e^{-\frac{K}{m}t} - \frac{f_c \cdot mg}{K}$$

#### Remarque :

La vitesse tend vers une valeur négative  $\left( -\frac{f_c \cdot mg}{K} \right)$ . Cela vient du fait que l'écriture de notre équation n'est plus bonne dès lors que l'avion est arrêté, puisque la force de frottement s'annule à ce moment.

D'après notre équation, la force de frottement  $-f_c \cdot mg$  (qui ne dépend pas de la vitesse) fait reculer l'avion après que ce dernier s'est arrêté.

La traînée augmente alors en sens opposé (dirigée selon  $\vec{x}$ ), jusqu'à une valeur telle qu'elle compense la force de frottement (toujours dirigée selon  $-\vec{x}$ ). Cette valeur est atteinte pour une vitesse de  $-\frac{f_c \cdot mg}{K}$ .

D'après notre équation, la vitesse passe par 0 pour le temps  $t$  tel que :

$$V(t) = 0 = \left( V + \frac{f_c \cdot mg}{K} \right) e^{-\frac{K}{m}t} - \frac{f_c \cdot mg}{K}$$

Soit :

$$e^{-\frac{K}{m}t} = \frac{\frac{f_c \cdot mg}{K}}{V + \frac{f_c \cdot mg}{K}}$$

$$\frac{K}{em}t = \frac{V + \frac{f_c \cdot mg}{K}}{\frac{f_c \cdot mg}{K}}$$

$$\frac{K}{m}t = \ln\left(\frac{V + \frac{f_c \cdot mg}{K}}{\frac{f_c \cdot mg}{K}}\right) = \ln\left(\frac{KV}{f_c \cdot mg} + 1\right)$$

Soit :

$$t = \frac{m}{K} \ln\left(\frac{KV}{f_c \cdot mg} + 1\right) = \frac{10\,000}{203,55} \ln\left(\frac{203,55 \cdot \left(\frac{172}{3,6}\right)}{0,8 \cdot 10\,000 \cdot 9,81} + 1\right) = 5,7 \text{ s}$$

Plus la vitesse de l'avion est importante, plus le temps de freinage est grand. Conclusion inverse si c'est le coefficient d'adhérence qui est important.

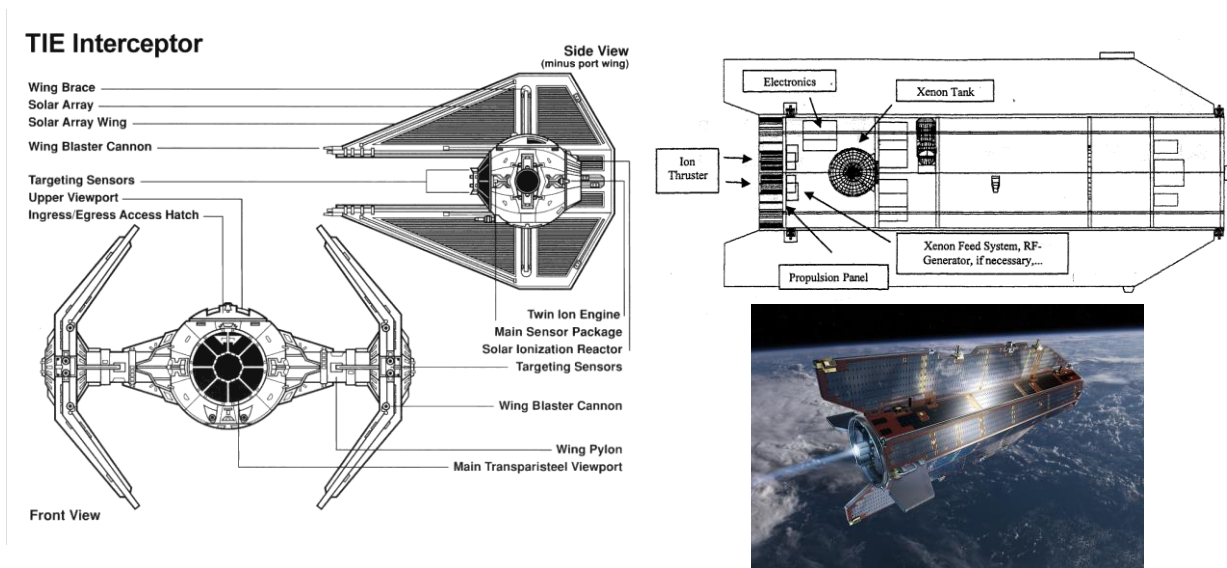
S'il est en revanche plus difficile de conclure simplement avec la masse ou la traînée de l'avion d'après notre formule, le bon sens nous indique qu'une augmentation de masse va augmenter le temps de freinage (inertie plus importante), à l'inverse d'une augmentation de traînée.

Il est à noter que si le pilote freine de telle manière qu'il est en limite de blocage des roues, le coefficient d'adhérence au sol est plus important, donc il est possible d'augmenter encore l'efficacité du freinage et donc diminuer le temps d'arrêt de l'avion.

#### Annexe :

x	cos(x)	sin(x)	x	cos(x)	sin(x)
-0,05	0,999	-0,050	-0,146	0,989	-0,145
-0,049	0,999	-0,049	-0,145	0,990	-0,144
-0,048	0,999	-0,048	-0,144	0,990	-0,144
-0,047	0,999	-0,047	-0,143	0,990	-0,143
-0,046	0,999	-0,046	-0,142	0,990	-0,142
-0,045	0,999	-0,045	-0,141	0,990	-0,141
-0,044	0,999	-0,044	-0,14	0,990	-0,140
-0,043	0,999	-0,043	-0,139	0,990	-0,139
-0,042	0,999	-0,042	-0,138	0,990	-0,138
-0,041	0,999	-0,041	-0,137	0,991	-0,137
-0,04	0,999	-0,040	-0,136	0,991	-0,136
-0,039	0,999	-0,039	-0,135	0,991	-0,135
-0,038	0,999	-0,038	-0,134	0,991	-0,134
-0,037	0,999	-0,037	-0,133	0,991	-0,133
-0,036	0,999	-0,036	-0,132	0,991	-0,132
-0,035	0,999	-0,035	-0,131	0,991	-0,131
-0,034	0,999	-0,034	-0,13	0,992	-0,130
-0,033	0,999	-0,033	-0,129	0,992	-0,129
-0,032	0,999	-0,032	-0,128	0,992	-0,128
-0,031	1,000	-0,031	-0,127	0,992	-0,127
-0,03	1,000	-0,030	-0,126	0,992	-0,126
			-0,125	0,992	-0,125

### EXERCICE 3 : TIE (non) Fighter



Le satellite GOCE de l'agence spatiale européenne, propulsé par deux propulseurs ioniques (*Twin Ion Thrusters*), était l'engin orbital le plus stylé et le plus ressemblant au célèbre chasseur (*Twin Ion Engines*) de l'Empire dans la non-moins célèbre fiction de George Lucas.

Le « *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer* » (prononcer [Go-ché], à l'italienne), était prévu pour effectuer un vol propulsé pendant 15000 heures (environ 20 mois) à 260 km d'altitude en moyenne en orbite ~polaire, dans la *thermosphère*. La traînée de ce satellite profilé est par construction minimisée, mais pas nulle. Une fois son Xénon épuisé en 2013, sa chute a pris un mois seulement pour finir par se désintégrer comme une étoile filante en quelques minutes.

#### Données:

Masse totale en début de mission : 1100 kg  
 Masse de fluide propulsif (Xe) : 40 kg  
 Poussée maximale du propulseur ionique : 35 mN

- 1) Sachant que la traînée aérodynamique de GOCE varie entre 4 et 12 mN, calculez pour la poussée maximale les accélérations maximale/minimale/moyenne et justifiez l'approximation qui consiste à considérer la masse comme constante en moyenne à 1080 kg.

On fait un calcul d'*extrema* en faisant le bilan des forces et l'accélération qui en résulte :

$$\sum F = T_{max} - D = ma \leftrightarrow a = \frac{T_{max} - D}{m}$$

Où  $T$  représente la poussée maximale et  $D$  la traînée de GOCE.

Il en ressort que :

$$a_{max} = \frac{T_{max} - D_{min}}{m_{min}} = \frac{2.35.10^{-3} - 4.10^{-3}}{1060} = 6,226.10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

$$a_{min} = \frac{T_{max} - D_{max}}{m_{max}} = \frac{2.35.10^{-3} - 12.10^{-3}}{1100} = 5,273.10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

$$a_{moy} = \frac{T_{max} - D_{moy}}{m_{moy}} = \frac{2.35.10^{-3} - 8.10^{-3}}{1080} = 5,741.10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

Ainsi on peut calculer l'écart relatif entre valeurs maximale/moyenne et valeurs minimale/moyenne :

$$\epsilon_{max-moy} = \frac{6,226 - 5,741}{5,741} 100 = 8,45 \%$$

$$\epsilon_{min-moy} = \frac{5,273 - 5,741}{5,741} 100 = -8,15 \%$$

On est ainsi capables de prévoir les accélérations instantanées à moins de 10% près, ce qui semble tout à fait acceptable pour une phase d'avant-projet (jugement d'ingénieur, la réponse est dans la question en fait...).



- 2) Ce propulseur utilise de l'énergie électrique pour ioniser et accélérer une masse de gaz propulsif (Xénon ici) et provoquer une réaction en retour (le gaz n'est donc pas le « carburant » au sens courant du terme). Au banc d'essais on a mesuré la poussée dans le quasi-vide, la consommation de Xénon, la consommation électrique et la vitesse d'éjection du Xénon ionisé (pour 1 propulseur) :

Poussée (N)	Débit massique (kg/s)	Puissance électrique fournie (W)	Vitesse d'éjection (m/s)
2,50E-003	3,50E-007	100	7142
5,00E-003	5,00E-007	170	10000
6,00E-003	5,25E-007	200	11428
1,20E-002	5,50E-007	380	21818

En calculant la puissance du jet de gaz ionisé, calculez l'évolution du rendement énergétique  $\eta$  (ou efficacité) en fonction du niveau de poussée.

En déduire la tendance et le point de fonctionnement préférentiel (toute considération opérationnelle mise de côté).

La puissance du jet est :

$$P_{jet} = Pousse \cdot V_{ejection}$$

Et le rendement énergétique (par rapport à l'énergie électrique dépensée), on a :

$$\eta = \frac{P_{jet}}{P_{elec}}$$

On trouve dans l'ordre pour chaque poussée : 18 %, 29 %, 34 % et 69 %.

Il vaut mieux être à des consignes de poussée élevées. **On préférera donc rester à 12 mN de poussée pour les opérations.**

Remarque :

Le débit massique est surnuméraire comme information, mais on peut vérifier que la poussée est égale au débit multiplié par la vitesse d'éjection.

### 3) Bilan énergétique sur la mission.

1. Sachant que la vitesse du satellite par rapport au repère géocentrique (sans tenir compte de la rotation de la terre donc) sur son orbite circulaire peut s'écrire  $V_{ORB} = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{R_0+h}}$  où  $R_0$  est le rayon de la terre (6378 km),  $h$  l'altitude du satellite (260 km) et  $g_0$  l'accélération de la pesanteur au niveau du sol ( $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ), calculez l'énergie dépensée pour contrer la traînée de GOCE sur la durée de la mission en considérant l'hypothèse la plus pessimiste.

On peut déjà calculer la valeur de la vitesse avec la formule :

$$V_{ORB} = 6378.10^3 \sqrt{\frac{9,81}{6378.10^3 + 260.10^3}} = 7753 \text{ m.s}^{-1} (= 7,75 \text{ km.s}^{-1})$$

Donc pour une traînée de 12 mN, on a :

$$P_{utile} = 7753.12.10^{-3} = 93 \text{ W}$$

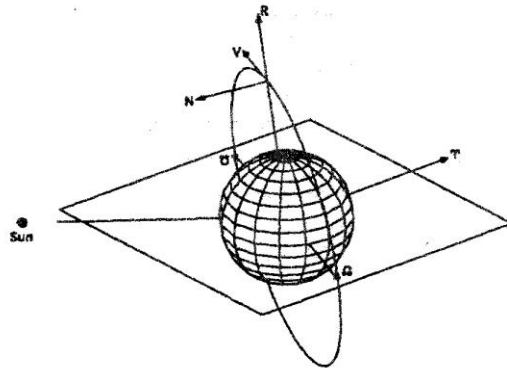
Ce qui, sur une mission de 15000 h donne une dépense énergétique en Joules ( $W.s$ ) de :

$$E_{traînee} = 93.15000.3600 = 5\,022\,000\,000 \text{ J} = 5.10^9 \text{ J}$$

Soit l'équivalent du pouvoir calorifique de 120 kg de pétrole brûlé avec son comburant.

#### Remarque :

S'il on compare avec la puissance de jet à 12 mN, on trouve  $P_{jet} = 262 \text{ W}$  pour une puissance électrique consommée  $P_{elec} = 380 \text{ W}$  et non 93 W comme calculé d'après l'énergie mécanique du véhicule. Dans ces conditions, le rendement global du propulseur n'est pas de 69 %, mais de  $\frac{93}{380} 100 = 24,5 \%$  seulement, c'est à dire que près de trois quarts de la consommation électrique concernerait l'alimentation des servitudes, vannes, régulateurs, conditionnement divers.



2. Calculer l'énergie totale de GOCE sur son orbite polaire par rapport au repère géocentrique ci-dessus (on supposera que l'on a toujours  $g = g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  pour le calcul de l'énergie potentielle).

Dans le repère géocentrique, on a l'énergie totale :

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} m V_{ORB}^2 + mg(R_0 + h) = \frac{1}{2} 1080.7753^2 + 1080.9,81. (6378 + 260). 10^3$$

$$= 32.10^9 + 70.10^9 = 102.10^9 \text{ J}$$

Un tiers de l'énergie concerne l'énergie cinétique et les deux tiers restants concerne l'énergie potentielle de pesanteur.

3. Dans le bilan énergétique de la **mission**, calculez la part apportée par le lanceur pour placer l'engin sur son orbite.  
Puis, estimez sur la durée prévue de la mission la part relative apportée par le satellite pour vaincre la traînée résiduelle (considérez cette énergie comme 100% embarquée sous une forme ou une autre).  
Commentez par rapport au couple altitude moyenne/vitesse choisie.

Si le lanceur fournit l'énergie  $\frac{1}{2} m V_{ORB}^2 + mgh$ , il « resterait » donc  $\Delta E_t = mgR_0$  à la charge de Goce ?

Non puisque le site de lancement ne se situe pas au centre de la terre...

L'énergie communiquée par le lanceur est bien :

$$E_{\text{lanceur}} = \frac{1}{2} m V_{ORB}^2 + mgh = \frac{1}{2} 1080.7753^2 + 1080.9,81.260. 10^3 = 35.10^9 \text{ J}$$

Soit le tiers de ce que l'on avait avant par ce simple changement de repère, avec une énergie cinétique prépondérante cette fois (l'atmosphère n'est pas bien épaisse...).

Cette valeur est à mettre en regard des  $5.10^9 \text{ J}$  consommés en traînée aérodynamique trouvés à la question 3.1).

Au global, l'énergie totale de GOCE dans le repère géocentrique n'est pas le bilan énergétique de la mission, qui est la somme de l'énergie apportée par le lanceur et de

celle apportée par le satellite (en fait par le soleil pour l'énergie et le satellite pour la matière à éjecter grâce à cette énergie et provoquer une réaction).

Le bilan énergétique de la mission s'élève donc à :

$$E_{\text{lanceur}} + E_{\text{traînée}} = (35 + 5) \cdot 10^9 = 40 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La part nécessaire pour vaincre la traînée orbitale s'élève donc à  $\frac{5}{40} \cdot 100 = 12,5\%$ .

Ce n'est pas négligeable au sens mathématique, mais ça reste raisonnable pour l'altitude/traînée moyenne choisie. Même si l'énergie provient du soleil, le fluide propulsif (Xénon) doit quand même être apporté. Au moins à cette [altitude ; vitesse orbitale] = [260 km ; 7,75 km/s] on ne doit pas à fournir à nouveau un effort énergétique comparable à l'investissement initial une fois en orbite, pas même une fraction significative de cet effort. On ne peut pas préjuger du bilan énergétique de la traînée si l'on volait plus bas avec les données du problème, mais déjà à 12,5 % on n'a pas nécessairement envie d'atteindre 15, 20 ou 25 %...

Remarque :

Le vol sur une orbite elliptique de Gagarine passait de 327 km à l'apogée à 181 km seulement au périhélie. C'était précisément fait pour traîner assez afin qu'en cas de panne du système de rétrofusée, le Vostok rentre de lui-même avant que les réserves d'oxygène du vaisseau soient épuisées (à peine quelques orbites de 90 minutes environ). 80 km plus bas que GOCE, ça freine énormément donc...

L'ISS descend jusqu'à 330 km avant d'être régulièrement reboostée à 420 km.



La fin de GOCE, quelque part au-dessus de l'amérique du Sud

([https://www.youtube.com/watch?v=sMktaiW9\\_1M](https://www.youtube.com/watch?v=sMktaiW9_1M))

## EXERCICE 4 : « First Man »




 NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection  
<http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/index.html>  
 NASA Photo: E-4942 Date: 1959 Photo by: NASA photo  
 X-15 launch from B-52 mothership

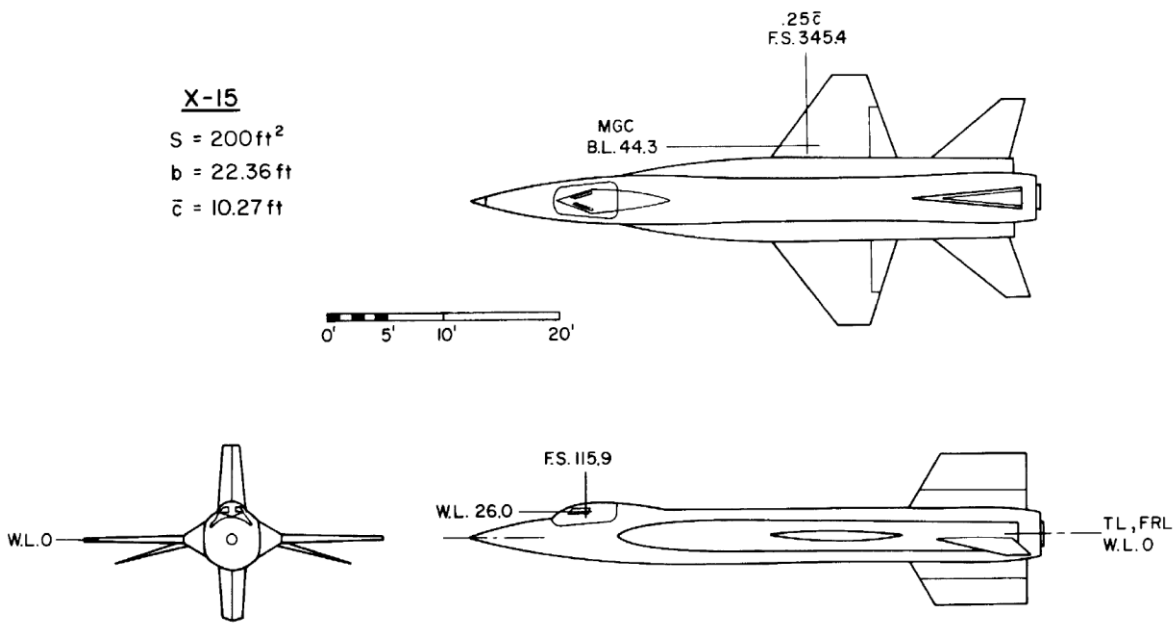


Figure V-2. X-15 General Arrangement

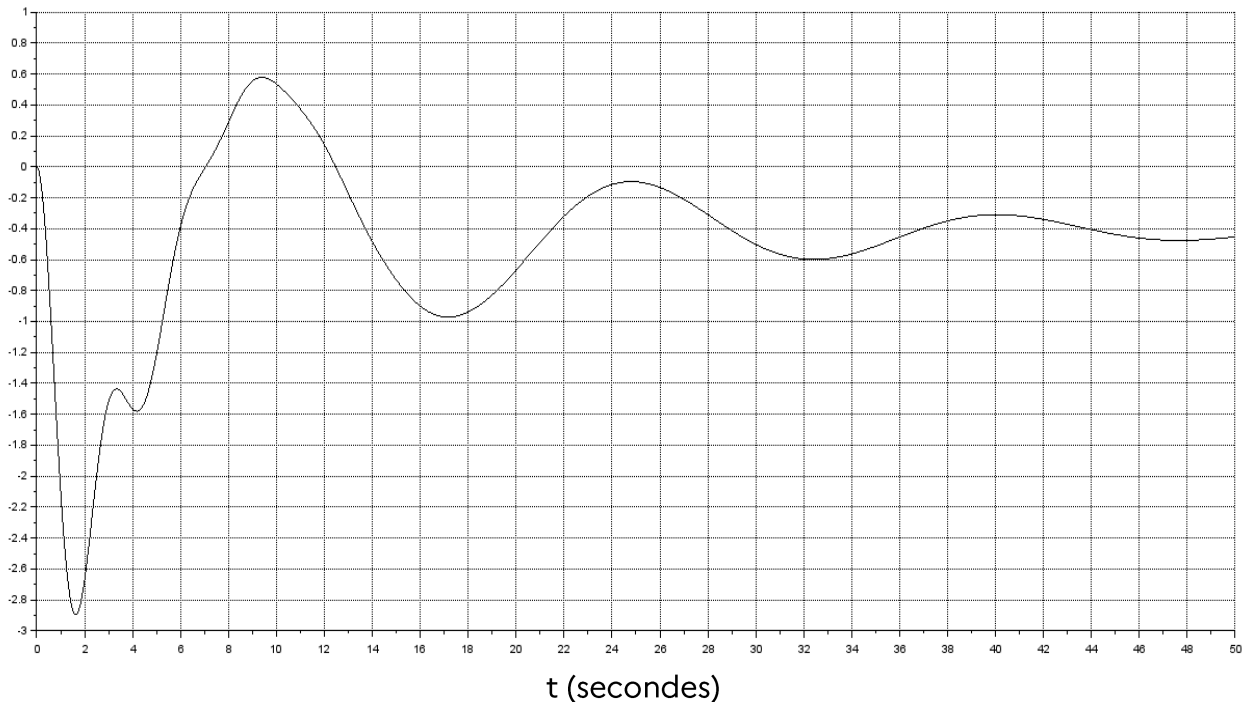
I- Avion naturel en conditions de largage (Cas de vol 4,  $M = 0,8$ ,  $H = 40\ 000 \text{ ft}$ )

La Fonction de transfert reliant la profondeur  $\delta_s$  (*stabilizer*) à l'assiette ( $\theta$ ) du X-15 à sa masse au largage est :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_s(s)} = \frac{-7,02(s + 0,138)(s + 0,334)}{(s^2 + 0,145s + 0,175)(s^2 + 0,844s + 4,452)}$$

Une fois largué, le X-15 répond ainsi à un simple échelon unitaire en profondeur (1 degré) :

$\theta$  (deg)



- 1) Déterminez la période, la fréquence et la pulsation d'oscillation la plus lente (dite « phugoïde » ou « phygoïde »).

On lit sur le graphe une période  $T_p = 32 - 17 = 15$  s, donc  $f_p = \frac{1}{15}$  Hz et  $\omega_p = \frac{2\pi}{15} = 0,419$  rad.s<sup>-1</sup>.

Il s'agit de la pulsation la plus faible des deux parenthèses au dénominateur de la fonction de transfert, donc le mouvement/mode le plus lent (l'autre étant l'oscillation en incidence).

- 2) Peut-on justifier l'approximation  $\omega_{amorti} \approx \omega_{naturel}$  pour cet aéronef, sur la base de son amortissement réduit ?

Les deux parenthèses au dénominateur de la fonction de transfert peuvent chacune se mettre sous la forme :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

La première parenthèse fait apparaître une pulsation naturelle plus faible que la seconde, elle correspond donc au mode lent phugoïde, dont on a déterminé à la question précédente la valeur de la pulsation amortie  $\omega_p = 0,419$  rad.s<sup>-1</sup>. Or on remarque que  $\omega_p^2 = 0,419^2 = \omega_n^2$ .

Sachant que  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ , on voit bien que l'on peut considérer que la valeur de l'amortissement réduit  $\xi$  est faible ( $\omega_p \approx \omega_n$ ).

Pour s'en convaincre par le calcul, on a :  $\frac{2\xi\omega_n}{2\omega_n} = \frac{0,145}{2,0,419} = 0,173$ .

3) A quelle valeur l'assiette va-t-elle se stabiliser pour un échelon unitaire (1°) de gouverne de profondeur ?

On utilise le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s)$$

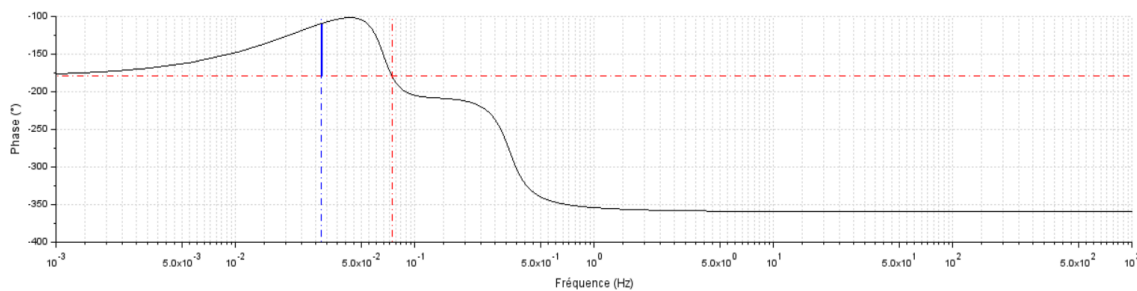
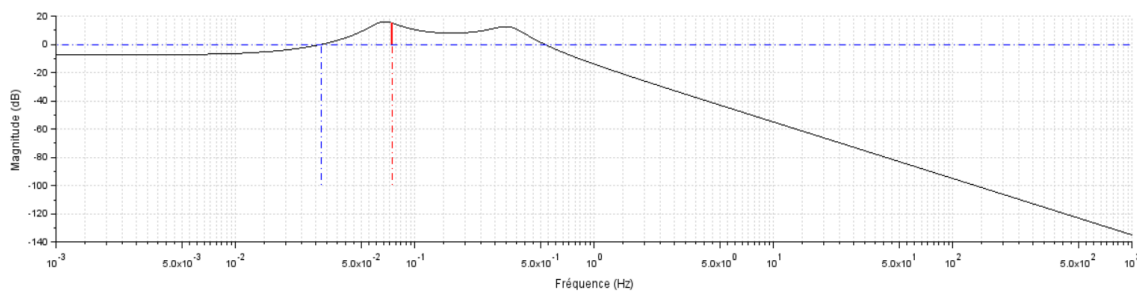
Avec :

$$T(s) = \frac{1 \theta(s)}{s \delta_s(s)}$$

Puisqu'on applique un échelon dont la transformée de Laplace est  $\frac{1}{s}$ . Ainsi on a  $s \frac{1}{s}$  qui s'annule et donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\theta(s)}{\delta_s(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{-7,02(s + 0,138)(s + 0,334)}{(s^2 + 0,145s + 0,175)(s^2 + 0,844s + 4,452)} \right)$$

$$= \frac{-7,02 \cdot 0,138 \cdot 0,334}{0,175 \cdot 4,452} = -0,415^\circ$$



4) Le diagramme de Bode ci-dessus donne une idée de la réponse fréquentielle longitudinale du X-15 en assiette et en boucle ouverte pour le point de vol choisi.

1. Désignez sur le graphe les marges de gain et de phase et donnez leurs valeurs, ainsi que les fréquences associées.

La marge de gain est en rouge sur la courbe de gain. Lorsque la phase passe par  $-180^\circ$  (à  $0,075 \text{ Hz}$  environ), on a un gain positif de près de  $15 \text{ dB}$  : la marge de gain est donc négative.

La marge de phase est en bleu sur la courbe de phase, mais il y a deux passages par  $0 \text{ dB}$  : un premier à  $0,03 \text{ Hz}$ , et un deuxième à  $0,5 \text{ Hz}$ . Le premier correspond à une phase de  $-110^\circ$ , ce qui donnerait une marge de  $70^\circ$ . Le deuxième à une phase de  $-340^\circ$ , ce qui équivaudrait à une avance de  $20^\circ$ , donc une marge de  $160^\circ$ . C'est clairement celle associée au premier qui est la plus « limitative » avec  $70^\circ$ , c'est donc la marge de phase retenue *in fine*.

2. Constatez le paradoxe qu'il y a lorsque l'on compare la réponse temporelle du X-15 et ses marges de gain et de phase.

On a une marge de gain négative pour des fréquences proches de celle de la phugogène, alors que la réponse temporelle montre quelque chose de parfaitement stable.

Remarque :

Avec les conventions de signe retenues, une déflexion positive de la profondeur (bord de fuite de la gouverne défléchie vers le bas, située à l'arrière par rapport au centre de gravité ici) provoque un mouvement à piquer, donc négatif à  $-180^\circ$ . Ce serait un mouvement positif s'il s'agissait d'un plan canard (situé à l'avant par rapport au CG).

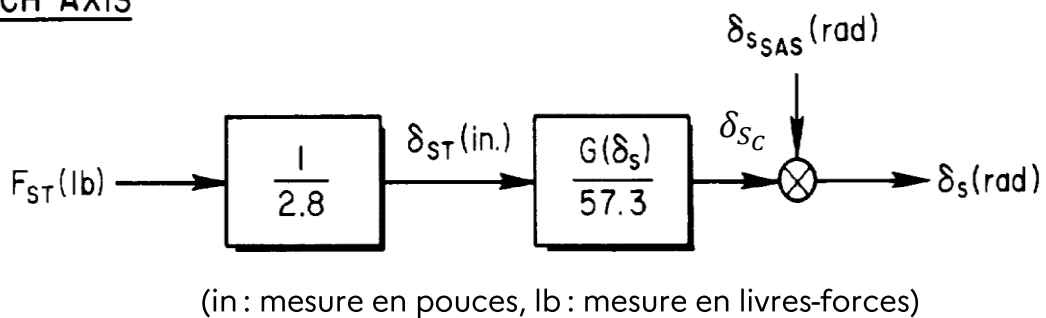
Dans le cas du plan canard, on aurait la même réponse fréquentielle en gain sur  $\theta$ , mais on partirait donc de  $0^\circ$  de déphasage, et on n'atteindrait jamais  $-180^\circ$  avec un gain positif. La marge de gain serait donc en réalité infinie.



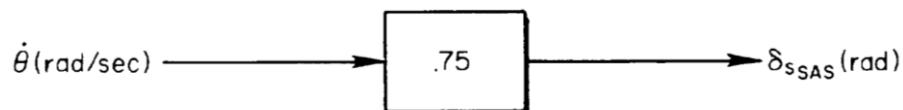
## II- Stability Augmentation System ON

Le schéma général des commandes de vol du X-15 est constitué d'une chaîne transformant des efforts aux manches ( $F_{ST}$ ) en ordres de gouvernes commandées  $\delta_{S_c}$ , qui peuvent être « augmentées » ( $\delta_{S_{SAS}}$ ) par une boucle de rétroaction (« feedback ») améliorant la stabilité et construite à partir de la mesure de la vitesse de tangage  $q = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  par un gyromètre solidaire de la structure du véhicule aérospace (on étudiera ultérieurement la fonction  $G$ , dont le gain dépend de la déflexion effective  $\delta_S$  au moment de la prise en compte de la commande  $\delta_{ST}$ ).

### PITCH AXIS



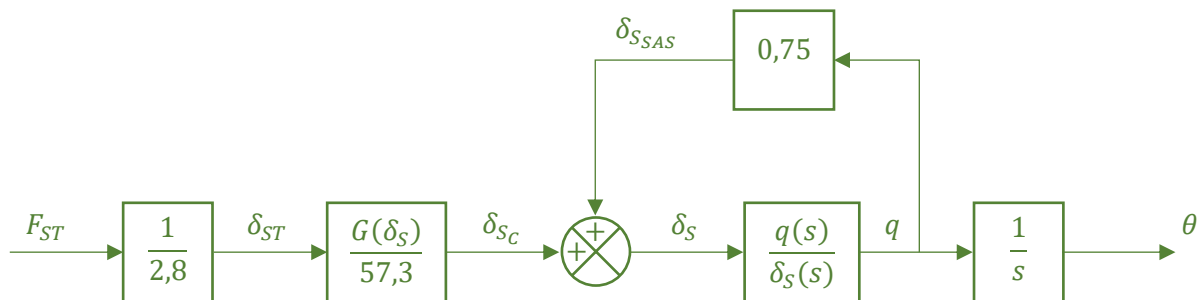
### PITCH SAS



On définit la déflexion « commandée »  $\delta_{S_c}$  telle que  $\delta_S = \delta_{S_c} + \delta_{S_{SAS}}$ .

- 1) Représentez sur un schéma-bloc l'ensemble « augmenté » entre  $\delta_{S_c}$  et  $q$ .

On a le schéma bloc :



- 2) Quelle fonction de transfert relie plus particulièrement l'entrée  $\delta_s(s)$  à la sortie  $q(s)$  ?

En fait on intègre la vitesse de tangage pour trouver l'assiette ; on n'a pas de mesure « absolue » de l'assiette que l'on dériverait pour trouver la vitesse de tangage (d'où la mention d'un gyromètre dans l'énoncé).

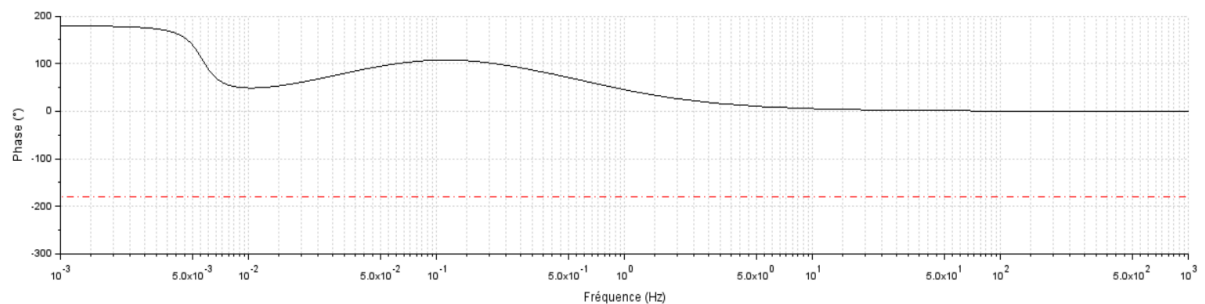
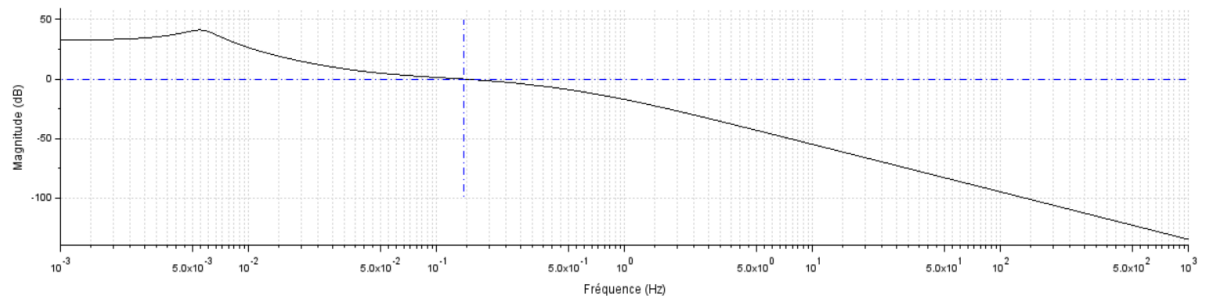
L'important est donc d'ajouter le  $s$  au numérateur de la fonction de transfert  $\frac{\theta(s)}{\delta_s(s)}$ . On a alors :

$$\frac{q(s)}{\delta_s(s)} = \frac{s\theta(s)}{\delta_s(s)} = \frac{-7,02 * s * (s + 0,138)(s + 0,334)}{(s^2 + 0,145s + 0,175)(s^2 + 0,844s + 4,452)}$$

On s'intéresse au contrôle de l'assiette avec l'asservissement actif. La fonction de transfert résultant de cet asservissement est :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_{sc}(s)} = \frac{-7,02(s + 0,138)(s + 0,334)}{(s^2 + 0,01335s + 0,0013)(s + 1,29)(s + 4,82)}$$

La réponse fréquentielle (superposée à la boucle ouverte pour le gain, 2 graphes de phases) est donnée ci-après :



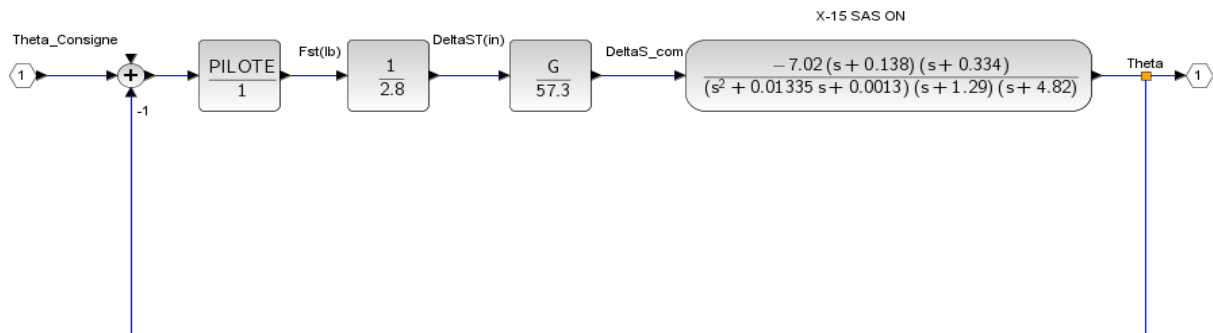
- 3) Considérant cette réponse fréquentielle, vous semble-t-il exister (et pourquoi ; ou non) un risque d'instabilité du X-15 « augmenté » ?  
(Note : à basse fréquence, on n'atteint jamais +180° de déphasage).

Clairement non d'après ce qui est visible sur cette portion. Le gain passe à 0 dB vers 0,2 Hz (très basse fréquence toujours), où la phase mène par plus de 100° d'avance, donc une marge de 280° existe ici. Comme elle ne passe jamais par  $\pm 180^\circ$  autour de la fréquence de coupure, le pilote peut amener tout le gain qu'il veut, il ne se passera rien (la marge de gain est infinie par ailleurs) en terme strict d'instabilité.

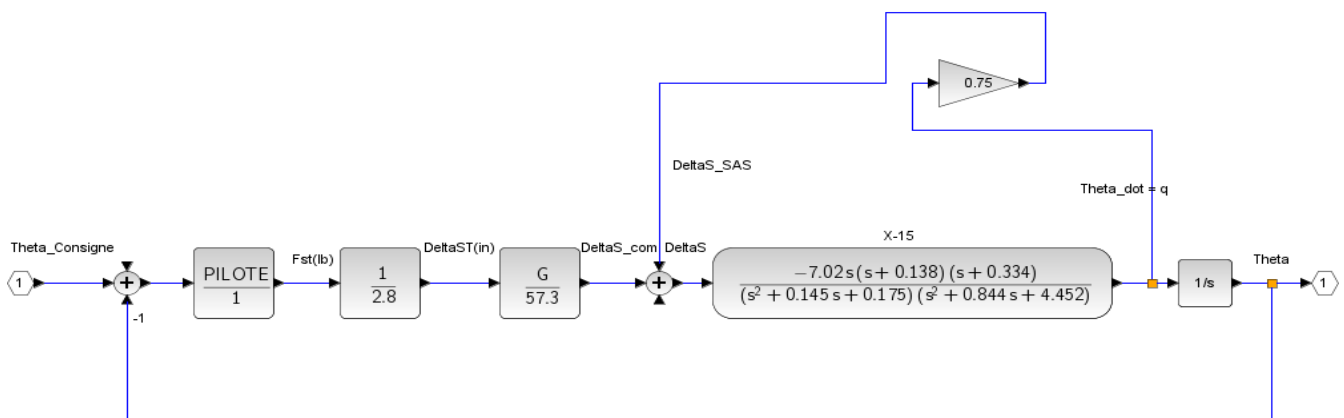
### III- Inclusion d'un pilote dans la boucle longitudinale.

Reprendre les schéma-blocs fournis et/ou créés précédemment.

- 1) En considérant le X-15 augmenté comme un simple « bloc X-15 » avec  $\delta_{S_c}$  en entrée et  $\theta$  en sortie, proposer un nouveau schéma-bloc incluant une « boîte » pilote vu en tant que contrôleur (au sens de l'automatique) pour réaliser un maintien d'assiette  $\theta_c$ .



Ou bien :

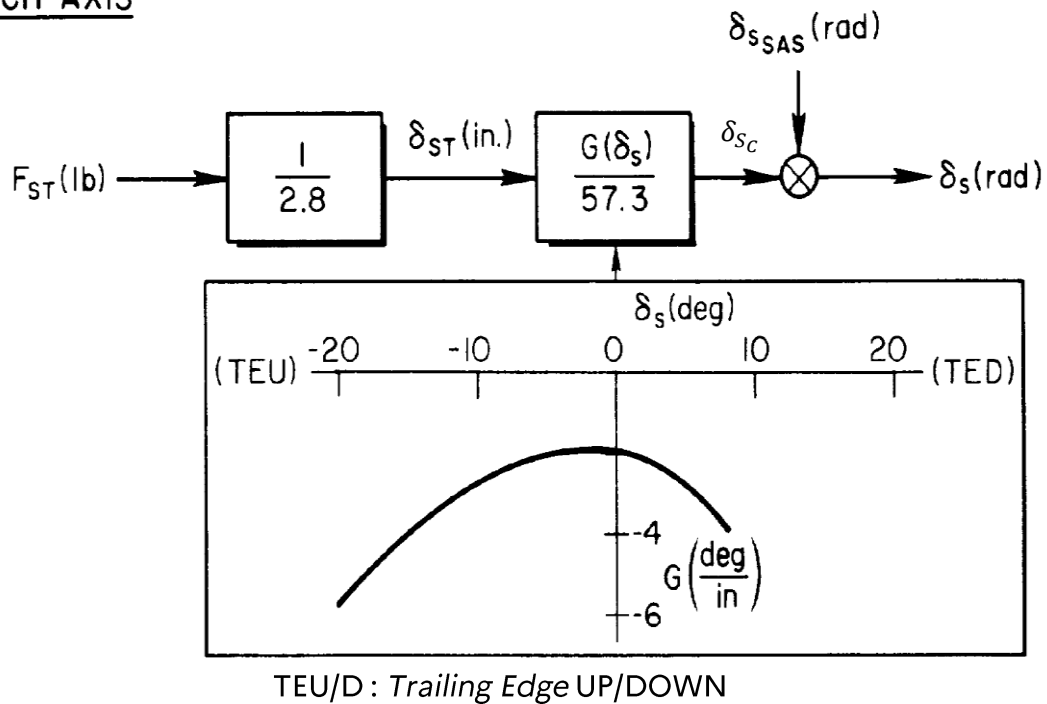


- 2) Quel élément mécanique peut jouer la fonction du gain  $\frac{1}{2,8}$  dans le schéma-bloc des commandes ?

On a la relation  $F_{ST} = \frac{1}{2,8} \delta_{ST} = k \delta_{ST}$ , soit de la même forme que pour un ressort.

La fonction G définit la déflexion commandée ( $\delta_{sc}$  en degré) en fonction du déplacement de la commande en entrée ET de la position effective de la gouverne  $\delta_s$  au même moment.

### PITCH AXIS



- 3) Pourquoi n'est-il en toute rigueur pas possible de trouver la fonction de transfert du système  $\frac{\theta(s)}{\theta_c(s)}$  ?

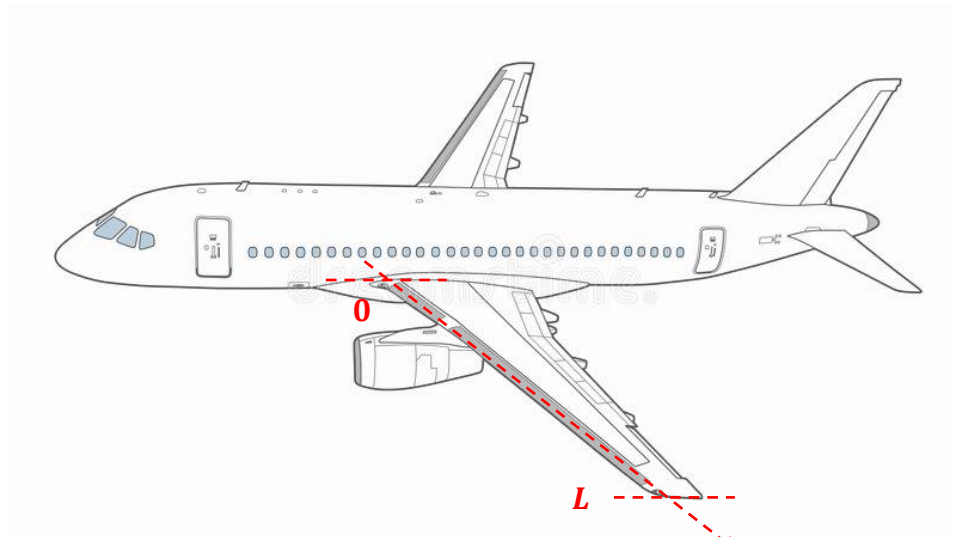
Parce qu'il y a une non-linéarité entre déplacement du manche  $\delta_{ST}$  (qui commande une déflexion  $\delta_s$ ) et le gain de déflexion  $G$  suivant que l'on pousse ou tire (il y a un retour non symétrique sur la position de la gouverne).

### EXERCICE 5: Système d'antigivrage des ailes d'un avion

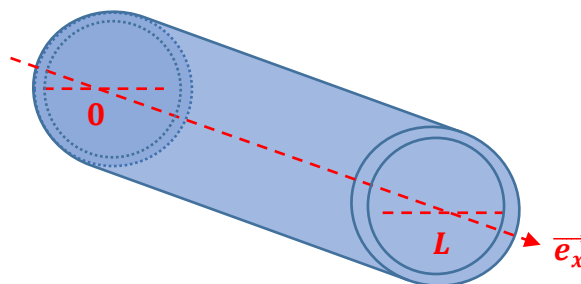
De l'air chaud ( $80^{\circ}\text{C}$ ) est prélevé au niveau des moteurs et circule dans une conduite le long du bord d'attaque des ailes, dans le but d'éviter que du givre ne se forme et ne dégrade sérieusement les performances de l'appareil.

On considère que la température de l'air est constante dans la conduite située dans le bord d'attaque.

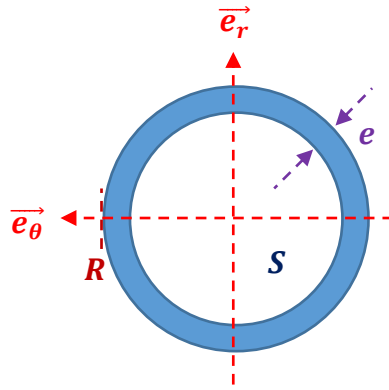
Cette conduite est assimilée à un cylindre de rayon  $R = 3\text{ cm}$  et de longueur  $L$ .



*Dispositif d'antigivrage sur aile d'avion.*

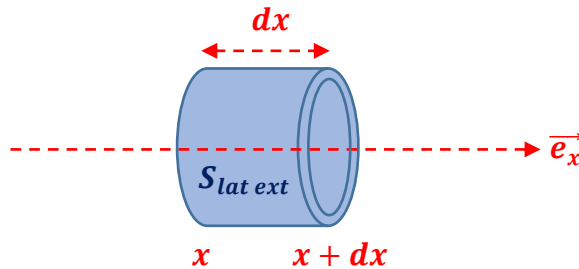


*Conduite dans laquelle s'écoule l'air chaud.*



Tuyau de la conduite vu de face.  
 La surface  $S$  est la section de la conduite laissée à l'air pour circuler.  
 L'épaisseur du tuyau est  $e = 2 \text{ mm}$ .

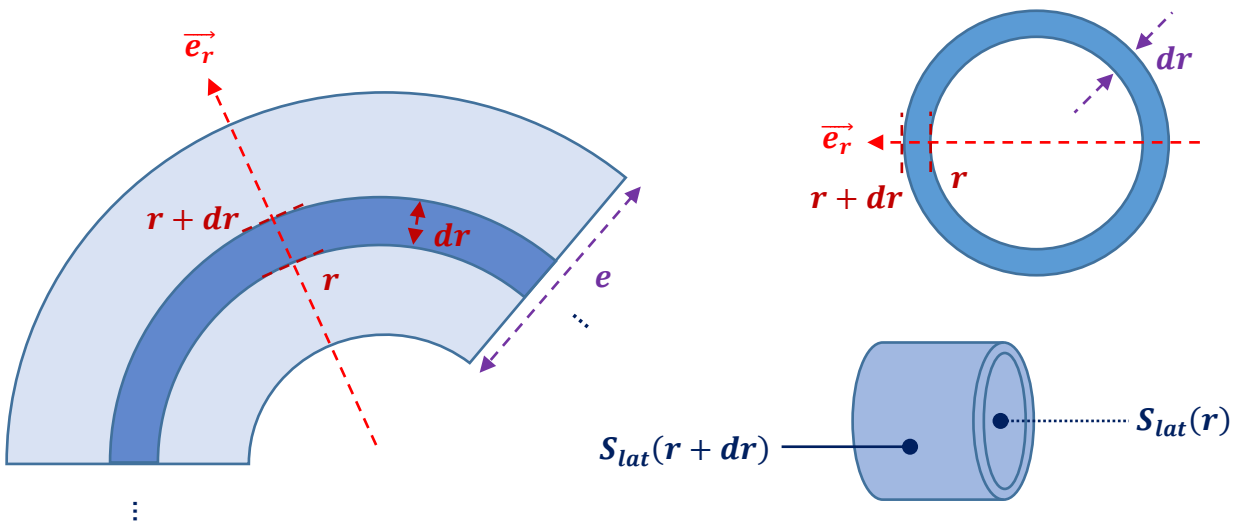
Nous allons concentrer notre étude sur une portion de la conduite, définie par sa longueur  $dx$  :



Portion de conduite, située à une distance  $x$  de l'emplanture de l'aile.

La surface latérale extérieure de cette portion de conduite (par laquelle la chaleur transite) est appelée  $S_{lat \ ext}$ .

Et nous allons encore diviser cette portion en plusieurs cylindres d'épaisseur  $dr$ , pour  $r$  tel que  $R > r > R - e$  :



On va supposer que l'échange de chaleur s'effectue au travers de la moitié avant de la conduite du bord d'attaque :



*Profil de l'aile, avec la conduite au niveau du bord d'attaque.*

*Le demi-cylindre avant permet l'échange de chaleur entre l'air circulant dans la conduite et l'air extérieur.*

*On suppose en revanche qu'aucun échange de chaleur ne se fera au travers du demi-cylindre arrière.*

Nous voulons étudier l'échange de chaleur entre l'air circulant dans la conduite et l'air extérieur. On supposera que le bord d'attaque est la surface latérale extérieure de la conduite. Il va donc falloir étudier le transfert d'énergie thermique qui s'opère au travers du tuyau de notre portion de conduite.

Pour cela, nous allons d'abord évaluer la variation d'énergie interne de notre système qui sera le morceau de tuyau d'épaisseur  $dr$  et longueur  $dx$  de la conduite, comme décrit précédemment.

Nous écrivons donc l'énergie interne  $U$  de notre système, le travail  $W$  qu'il reçoit ou donne au milieu extérieur, et les échanges d'énergie thermique  $Q$  avec le milieu extérieur.

- 1- Rappelez le premier principe de la thermodynamique, et l'unité des paramètres en jeu.

Pour un système qui peut échanger de l'énergie sous forme de chaleur ou travail avec le milieu extérieur, on a son énergie interne qui vaut :

$$U = Q + W$$

Il s'agit d'un bilan d'énergie, toutes les variables sont donc des quantités d'énergie exprimées en Joules.

- 2- Donnez en fonction de  $r$  et  $dx$ , l'expression de la surface par laquelle le transfert d'énergie thermique se fera, et que l'on appellera **surface d'échange**  $S_{ech}(r)$ .

La surface par laquelle s'effectue l'échange de chaleur est un demi-cylindre qui a pour longueur  $dx$  et rayon  $r$ . Si on mentalement on l'aplatit, on a un rectangle de longueur  $dx$  et largeur  $\frac{2\pi r}{2}$ .

Donc :

$$S_{ech}(r) = \frac{2\pi r}{2} dx = \pi r dx$$

Le flux thermique  $\varphi_r$  au travers de la surface d'échange  $S_{ech}(r)$  est défini par :

$$\varphi_r(t) = \frac{dQ}{dt}$$

3- Quelle est l'unité de  $\varphi_r$  ?

Il exprime la quantité de chaleur qui traverse une surface pendant un temps donné. On a donc  $\varphi_r$  qui s'exprime en  $J.s^{-1}$ , soit en  $W$ .

On définit le vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_{th}(r, t)$ , comme suit :

$$\varphi_r(t) = \vec{j}_{th}(r, t) \cdot S_{ech}(r) \cdot \vec{e}_r = j_{th}(r, t) \cdot S_{ech}(r)$$

4- Quelle est l'unité de  $j_{th}$  ? Qu'exprime-t-il ?

Etant donné l'objectif de notre système antigivrage, a-t-on plutôt intérêt à avoir une forte densité de flux thermique ou pas ?

On a  $j_{th}$  qui s'exprime en  $W.m^{-2}$ . Il s'agit du ratio entre flux de chaleur et surface par laquelle s'opère ce flux. Par exemple pour un flux de chaleur fixé, si la surface d'échange est importante, la densité de flux thermique sera faible.

Le but est que  $j_{th}$  ait une valeur la plus élevée possible (pour une faible surface d'échange on aura un flux de chaleur important), pour permettre de chauffer suffisamment le bord d'attaque et empêcher la formation de givre.

5- Sachant que notre système n'est soumis à aucune force du milieu extérieur, et inversement n'en exerce aucune, donnez la relation entre son énergie interne et la quantité d'échange d'énergie thermique.

Notre système d'étude n'échange aucun travail avec le milieu extérieur, donc le premier principe de la thermodynamique s'écrit simplement :

$$U = Q$$



On écrit donc, entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$U(t + dt) - U(t) = \varphi_r(t)dt - \varphi_{r+dr}(t)dt$$

6- Expliquez physiquement cette relation.

La variation d'énergie interne de notre morceau de conduite pendant un temps  $dt$  dépend de la quantité de chaleur qu'il reçoit par la surface  $S_{ech}(r)$  (c'est-à-dire  $dQ_r = \varphi_r(t)dt$ ) et qu'il libère par la surface  $S_{ech}(r + dr)$  (c'est-à-dire  $dQ_{r+dr} = \varphi_{r+dr}(t)dt$ ).

Pour la suite, on considérera que  $S_{ech}(r + dr) \approx S_{ech}(r)$ .

7- Montrez rapidement que :

$$\varphi_r(t)dt - \varphi_{r+dr}(t)dt = [j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)]S_{ech}(r)dt$$

On a très simplement :

$$\begin{aligned} [\varphi_r(t) - \varphi_{r+dr}(t)]dt &= [j_{th}(r, t) \cdot S_{ech}(r) - j_{th}(r + dr, t) \cdot S_{ech}(r + dr)]dt \\ &\approx [j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)]S_{ech}(r)dt \end{aligned}$$

Remarque :

L'hypothèse  $S_{ech}(r + dr) \approx S_{ech}(r)$  revient à dire que notre morceau de conduite cylindrique par lequel s'effectue l'échange de chaleur est en fait considéré comme une plaque plane. D'après les données de l'exercice, on a le rayon de la conduite qui vaut  $3 \text{ cm}$  tandis que son épaisseur ne fait que  $2 \text{ mm}$ . Cette hypothèse n'est donc pas complètement absurde.

8- Donnez l'expression de l'énergie interne  $U$  de notre système, en fonction de l'énergie interne volumique  $u$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ ),  $S_{ech}(r)$  et  $dr$ .

Le bon sens et une analyse rapide des dimensions de chaque variable nous donnent :

$$U = uS_{ech}(r)dr$$

9- Sachant que :

$$U(t + dt) - U(t) = \frac{dU}{dt} dt$$

Montrez que :

$$\frac{du}{dt} = \frac{j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)}{dr}$$

D'après les questions 6 et 7 on a :

$$U(t + dt) - U(t) = [j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)]S_{ech}(r)dt$$

Or :

$$U(t + dt) - U(t) = \frac{dU}{dt} dt = \frac{d(uS_{ech}(r)dr)}{dt} dt = \frac{du}{dt} S_{ech}(r) dr dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} S_{ech}(r) dr dt &= [j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)] S_{ech}(r) dt \\ \frac{du}{dt} dr &= [j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)] \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{du}{dt} = \frac{j_{th}(r, t) - j_{th}(r + dr, t)}{dr}$$

C'est une autre façon d'écrire que la variation d'énergie interne contenue dans notre morceau de conduite pendant un temps donné, dépend de la différence entre le flux de chaleur entrant par la surface en  $r$  et sortant en  $r + dr$ .

Il est possible de définir autrement la densité de flux thermique :

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

Où  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau constituant le tuyau, et  $T$  sa température en Kelvin.

10- Donnez l'unité de la conductivité thermique, ainsi que son sens physique.

On peut écrire :

$$\lambda = -\frac{j_{th} dr}{dT}$$

Donc l'unité de la conductivité thermique est :

$$\frac{(W \cdot m^{-2}) \cdot (m)}{(K)} = W \cdot m^{-1} K^{-1}$$

Elle traduit la capacité du matériau à permettre le transfert de chaleur entre deux points de température différente.

11- Comment évolue la température du matériau de notre tuyau avec  $r$  ?  
En déduire le signe de  $j_{th}$ . Que cela traduit-il physiquement ?

La température du matériau diminue lorsque l'on part de l'intérieur de la conduite ( $r$  augmente). En effet, l'air circulant dans la conduite est à une température de  $80^\circ C$ , bien plus importante que l'air extérieur...

Donc  $\frac{dT}{dr} < 0$  et la conductivité étant positive, on a  $j_{th} > 0$  (le vecteur densité de flux thermique est orienté selon  $\vec{e}_r$ ). Cela signifie que le transfert thermique s'opère dans le sens intérieur de la conduite vers l'extérieur, heureusement...

12- Compte-tenu de l'objectif de notre système d'antigivrage, quel matériau entre l'aluminium et le fer est à privilégier ?

Données:  $\lambda_{alu} = 226 \text{ SI}$  et  $\lambda_{fer} = 72 \text{ SI}$ .

Il vaut mieux un matériau très conducteur pour fournir un maximum d'énergie thermique à l'air extérieur, et empêcher que du givre ne se forme sur le bord d'attaque des ailes. On choisit donc l'aluminium.

Finalement, on peut écrire une équation sur la température du tuyau le long de son épaisseur  $e$ , et en fonction du temps si les conditions extérieures sont variables :

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \frac{d^2T}{dr^2}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $c$  sa capacité thermique massique.

Et où l'on a écrit :

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{d\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dr}$$

13- Donnez l'unité de  $c$ .

On peut écrire :

$$c = \frac{\lambda \frac{d^2T}{dr^2} dt}{\rho \frac{dT}{dr}} = \frac{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot K \cdot s}{kg \cdot m^{-3} \cdot m^2 \cdot K} = Ws \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1} = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$$

Il traduit la quantité d'énergie thermique (en Joules) qu'il faut fournir à un kilogramme d'un matériau donné pour augmenter sa température d'un Kelvin.

On se place dans des conditions non variables dans le temps. L'air extérieur est à  $5^\circ C$ . La température du tuyau ne dépend donc plus du temps, mais seulement de  $r$ .

14- Donnez le profil d'évolution de la température du tuyau en fonction de  $r$ .

On a notre équation qui devient :

$$\lambda \frac{d^2T}{dr^2} = \rho c \frac{dT}{dt} = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2T}{dr^2} = 0$$

Et en intégrant cette relation par rapport à  $r$  on a :

$$T(r) = k_1 r + k_2$$

Avec  $k_1$  et  $k_2$  des constantes. La température évolue linéairement avec  $r$ .

15- Calculez  $\frac{dT}{dr}$ .

On a :

$$\frac{dT}{dr} = k_1 = cste = \frac{T(R) - T(R - e)}{R - (R - e)}$$

Soit :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{(273,15 + 5) - (273,15 + 80)}{e} = \frac{5 - 80}{\frac{2}{1\,000}} = -37\,500 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

16- Montrez que dans ce cas, la densité de flux thermique  $j_{th}$  ne dépend pas de  $r$ , et donnez sa valeur en considérant le matériau le plus adapté entre aluminium et fer.

On utilise la relation :

$$j_{th} = -\lambda_{alu} \frac{dT}{dr} = -226 \cdot -37\,500 = 8\,475\,000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

La densité de flux thermique ne dépend ni du temps, ni de  $r$ . En n'importe quel point de la conduite, n'importe quand, le flux de chaleur traversant la surface d'échange locale  $S_{ech}(r)$  est constant.

Or, étant donné que l'on a considéré que la surface d'échange restait constante sur l'épaisseur de notre conduite (demi-cylindre  $\rightarrow$  plaque plane), l'énergie interne de la conduite est constante. Cela signifie que l'énergie thermique de l'air chauffé est totalement transférée à l'air extérieur, rien n'est gardé par l'aluminium (une fois l'équilibre thermique atteint : conditions stationnaires, au départ de l'énergie sera perdue à faire chauffer l'aluminium).

17- En déduire la valeur du flux thermique traversant la surface d'échange extérieure  $S_{ech}(R)$  de la portion de tuyau de longueur  $dx$ .  
Donnée :  $dx = 2 \text{ cm}$ .

On utilise la formule :

$$\varphi_R = j_{th} \cdot S_{ech}(R) = j_{th} \cdot \pi R \cdot dx = 8\,475\,000 \cdot \pi \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{100} = 15\,975 \text{ W}$$

Chaque seconde, 15 975 J d'énergie thermique sont transférés à l'air extérieur.

Remarque :

Ce flux ne dépend pas du temps ni de l'endroit où l'on se situe dans la conduite.

18- Si l'on avait choisi le matériau le moins adapté, quelle aurait été la valeur du flux thermique ? En quoi est-ce moins bien ?

Avec le fer on aurait eu :

$$\varphi_R = j_{th} \cdot S_{ech}(R) = -\lambda_{fer} \frac{dT}{dr} \cdot \pi R \cdot dx = -72 \cdot -37\,500 \cdot \pi \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{100} = 5\,089 \text{ W}$$

Moins le matériau est bon conducteur thermique, moins il peut transférer de chaleur à l'extérieur et donc empêcher l'apparition de conditions givrantes.

Avec un tuyau en fer, il faudrait donc chauffer de manière plus importante l'air circulant dans la conduite. Ce qui va nécessairement occasionner une augmentation de consommation de kérosène...

19- Le système d'antigivrage n'est toutefois pas aussi efficace en pratique, quelles sont les hypothèses optimistes faites en début d'exercice ?

La température de l'air n'est pas constante dans la conduite, puisqu'au fur et à mesure qu'il avance, il perdra de l'énergie thermique pour chauffer le bord d'attaque. De plus, de la chaleur s'échappera aussi par le demi-cylindre arrière, qui ne servira donc pas à chauffer l'air au niveau du bord d'attaque.

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

---

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »

---

SESSION DU 14 NOVEMBRE 2022

---

ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES

---

Durée: 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée --  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur ce document

Document validé par :

Nom :

Date : 02/11/2022

Signature :

### Exercice 1 : Analyse dimensionnelle

Dans un fluide, une bille de rayon  $R$ , animée d'une vitesse  $v$  est soumise à une force de frottement donnée par l'expression :

$$F = -6\pi\eta Rv$$

**1.a/** A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de  $\eta$ .

**1.b/** Soit  $\rho$  la masse volumique du fluide, proposer un nombre **sans dimension** en considérant l'expression suivante (On le notera arbitrairement  $N$ ) :

$$N = \rho \cdot \eta^B \cdot R^C \cdot v^D$$

**1.c/** A quel célèbre nombre sans dimension correspond  $N$  ? Quelle est la signification physique de ce nombre ?

## Exercice 2 : Etude de l'atmosphère en équilibre

Soit de l'air en équilibre dans le référentiel terrestre  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Chaque élément de ce fluide est en équilibre sous l'action des forces extérieures à cet élément. Ces forces sont de deux types :

- Les forces de pression
- La force due au champ de pesanteur (que l'on considère comme uniforme)

Le champ de pesanteur dans le référentiel terrestre est donné par :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z \quad \left( \text{avec } g = 9.81 \frac{m}{s^2} \right)$$

Pour un fluide au repos situé dans un champ de pesanteur uniforme l'équation d'Euler prend la forme suivante (hydrostatique des fluides).

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

l'état de l'atmosphère est caractérisé par sa pression  $p(x, y, z)$  et sa température  $T(x, y, z)$ .

### Rappels utiles :

1 m = 3.28 ft

Constante des gaz associée à l'air:  $r = 287 \frac{J}{kg.K}$

Loi des gaz parfaits reliant pression, masse volumique et température :  $p = \rho r T$

On rappelle la définition du Gradient d'un scalaire  $f$  :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

**a/** L'air étant considéré comme un gaz parfait, calculer sa masse volumique  $\rho_0(p_0, T_0)$  dans les conditions normales de pression  $p_0 = 101325 Pa$  et de température  $T_0 = 288 K$ .

**b/** En considérant l'équation de l'hydrostatique des fluides, montrer que la pression  $p(x, y, z)$  ne dépend que de  $z$  et établir l'équation différentielle permettant de déterminer  $p(z)$  en fonction de  $p, T, r$  et  $g$ .



## PARTIE 1: Atmosphère isotherme

Dans un premier temps, on considère une atmosphère **isotherme**  $T = T_0 = 288 \text{ K}$ .

**c/** Dans le cas d'une atmosphère isotherme, montrer que la pression  $p$  varie avec l'altitude  $z$  selon une loi du type :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H_0}}$$

Où  $H_0$  est une longueur que l'on nomme Hauteur d'échelle de l'atmosphère que l'on explicitera en fonction de  $T_0, r$  et  $g$ .

**d/** Donner la valeur numérique de la hauteur d'échelle  $H_0$  de l'atmosphère **isotherme**.

**e/** Calculer l'expression littérale du gradient vertical de pression  $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ . Puis la valeur numérique de ce gradient pour  $z = 2500 \text{ m}$ .

**f/** A partir de l'expression du gradient de pression trouvé en question précédente, donner pour l'altitude  $z = 2500 \text{ m}$  l'échelle de la dimension verticale  $L_z$  sur laquelle la pression varie de **1hpa**. On exprimera  $L_z$  en **m** et en **ft**

## PARTIE 2: Atmosphère en équilibre adiabatique sec

On considère maintenant l'atmosphère en équilibre **adiabatique sec** caractérisé à toute altitude par la relation  $p = K\rho^\gamma$ , avec  $K$  une constante et  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$  est le coefficient polytropique du gaz mis en jeu. On considère toujours que l'état de l'air est régi par la loi des gaz parfaits.

**Remarque:** on parle d'atmosphère en équilibre adiabatique sec lorsque les effets de l'humidité sont négligés.

**g/** Montrer qu'en considérant ce modèle d'atmosphère,  $p(z)$  et  $T(z)$  vérifient les relations suivantes :

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)$$

**h/** Calculer l'expression littérale du gradient vertical de **pression**  $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ . Puis les valeurs numériques de ce gradient pour  $z = 0 \text{ m}$ ,  $z = 2500 \text{ m}$  et  $z = 5000 \text{ m}$ . Commenter les écarts entre les valeurs obtenues.

**i/** A partir des gradients de pression trouvés dans la question précédente, donner pour l'altitude  $z = 2500 \text{ m}$  l'échelle de la dimension verticale  $L_z$  sur laquelle la pression varie de **1hpa**. On exprimera  $L_z$  en **m** et en **ft**.

**j/** Calculer l'expression littérale du gradient vertical de température  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)$  et donner sa valeur numérique en  $\frac{\text{K}}{\text{km}}$ .

### **PARTIE 3 : Atmosphère en équilibre adiabatique humide : Modèle d'atmosphère standard :**

Le modèle d'atmosphère standard est en équilibre **adiabatique humide**. Dans ce cas on considère les effets de la présence de vapeur d'eau dans l'air. Cette vapeur est inerte dans le modèle d'atmosphère en équilibre adiabatique sec. Ainsi le modèle adiabatique humide tient compte de la possible transition de phase de la vapeur d'eau dans les couches froides (condensation en gouttelettes).

- ⇒ L'évaporation de gouttes liquides consomme de l'énergie et a pour effet de refroidir le mélange gazeux (air) dans lequel elles se trouvent.
- ⇒ Au contraire, la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air restitue de l'énergie et réchauffe le mélange gazeux.

Le modèle d'atmosphère standard est en équilibre **adiabatique humide**. Ce modèle implique un gradient vertical de température de  $-6.5 \frac{K}{km}$  (pour  $z < 11 km$ ).

**k/** Commenter l'écart entre le gradient vertical de température en atmosphère sèche avec le gradient vertical de température en atmosphère humide.

Pour une atmosphère **adiabatique humide**. On donne :

$$L_{z=2500m} = 10.6 m = 34 ft.$$

**l/** Une sonde de pression statique mesure une pression de **540 hpa**. Estimer l'altitude associée en considérant les trois modèles d'atmosphère  $L_{z(humide)}$ ,  $L_{z(sec)}$  et  $L_{z(isotherme)}$ . Commenter l'écart entre les différentes valeurs obtenues.

### Exercice 3 : Décollage d'un porte-avions

Sur le pont d'un porte-avions, un biréacteur est prêt à être catapulté. Son train avant est accroché à une catapulte. On étudie le décollage en trois phases :

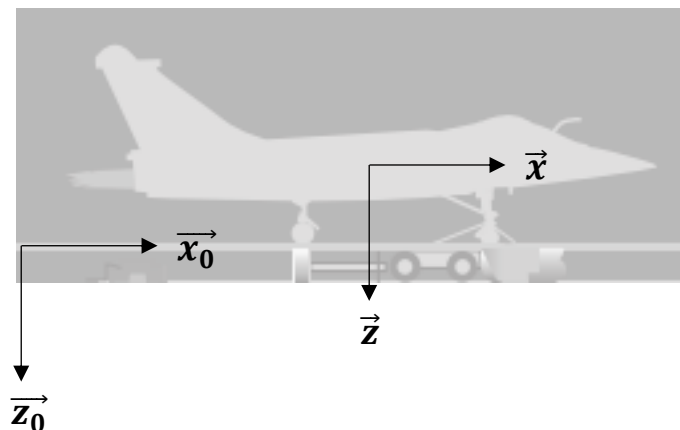
- 1- L'avion est fixe sur le pont, poussée des moteurs à leur valeur maximale
- 2- La catapulte est lancée à accélération constante sur toute sa course
- 3- Au moment où l'avion se détache de la catapulte, il effectue une rotation jusqu'à obtenir son assiette de décollage



[www.colsbleus.fr](http://www.colsbleus.fr)

#### Données :

- Course de la catapulte : 75 m
- Accélération de l'avion (catapulte) pendant la phase de catapultage :  $a = 4 g$
- Poussée maximale d'un moteur :  $T_{moteur} = 75 \text{ kN}$
- Masse de l'avion :  $m = 12 \text{ tonnes}$
- On se situe au niveau de la mer :  $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$
- On définit les axes longitudinal et vertical avion ( $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ ) et terrestre ( $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$ ) :



- Le repère terrestre est supposé Galiléen.
- On définit enfin les axes air ( $\vec{x}_a$  et  $\vec{z}_a$ ), on a toujours  $\vec{V} = V\vec{x}_a$ .
- La poussée des moteurs est négligeable suivant l'axe vertical avion.
- Caractéristiques aérodynamiques de l'avion :
  - Calage des ailes par rapport à l'axe longitudinal avion :  $\gamma_{ailes} = 5^\circ$
  - Coefficient de portance :  $C_z = 0,1\alpha$  avec  $\alpha$  l'incidence en degré
  - Coefficient de trainée :  $C_x = 0,01 + 0,12C_z^2$
  - Surface des ailes :  $S = 46 \text{ m}^2$
  - Trainée fuselage :  $(C_x S)_f = 1 \text{ m}^2$
- On introduit le facteur de charge total  $n_t$  par la relation :

$$\vec{n}_t = \frac{\vec{F}_a + \vec{T}}{mg}$$

Où  $\vec{F}_a$  est la résultante des efforts aérodynamiques s'exerçant sur l'avion et  $\vec{T}$  la poussée des moteurs.

- 1- Faire un schéma des forces qui s'appliquent sur l'avion pendant la phase 1.
- 2- Faire un schéma des forces qui s'appliquent sur l'avion pendant la phase 2 (on néglige toute forme de trainée **pendant cette phase** pour des raisons de simplification), et donner la valeur de la force tractrice exercée par la catapulte sur l'avion.
- 3- Montrer que la valeur de la vitesse en bout de pont est  $276 \text{ km/h}$ .

On passe dans la troisième phase : la rotation. On prend cette fois en compte la trainée de l'appareil (comme si elle apparaissait d'un coup).

L'avion pivote sur son train arrière jusqu'à ce qu'il obtienne une assiette lui permettant de quitter le pont. On suppose que le vecteur vitesse est toujours porté par l'axe  $\vec{x}_0$  pendant cette rotation, et que sa norme est constante (égale à  $276 \text{ km/h}$ ).

- 4- Donner la relation entre incidence des ailes, assiette de l'avion et calage des ailes.
- 5- Faire un schéma des forces et donner la valeur de l'assiette au moment où l'avion décolle.  
En déduire l'incidence des ailes.  
On pourra supposer que l'assiette reste faible de sorte que  $\sin\theta \approx \theta \text{ (rad)}$ .

Une fois que l'avion a quitté le pont, le pilote affiche une poussée lui permettant de stabiliser sa vitesse et une pente  $\gamma$ .

- 6- Faire un schéma des forces et donner la relation vectorielle du Principe Fondamental de la Dynamique, ainsi que la relation entre les différents angles. En déduire l'expression des facteurs de charge  $n_x, n_z$  tels que :

$$\begin{aligned} n_x &= \vec{n}_t \cdot \vec{x} \\ n_z &= \vec{n}_t \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Si les conditions visuelles sont mauvaises, dans quelle situation peut-il penser se retrouver (autre que la montée) ?

On considère pour la question suivante que  $\sin\theta \approx \theta$  ;  $\sin(\gamma - \theta) \approx \gamma - \theta$  ;  $\cos(\gamma - \theta) \approx 1$  et la masse volumique est toujours égale à  $1,225 \text{ kg/m}^3$ .

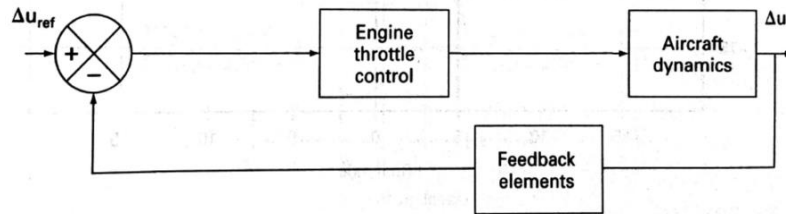
- 7- Quelle doit être la poussée des moteurs pour assurer la montée à une vitesse de  $400 \text{ km/h}$  et telle que  $n_x = 0,5$ .

**Aide :**

- Lister les inconnues et les relations à disposition.
- Projeter les PFD dans le repère avion, en supposant que la composante de trainée suivant l'axe vertical est négligeable.

## Exercice 4 : Velocity Hold Control System

On souhaite disposer d'un système qui capture et maintient la vitesse d'un avion, choisie par le pilote. On pense d'abord à ce schéma de principe :



- 1- Expliquer de manière globale le principe de ce système.
- 2- Pourquoi est-il important de rajouter des « Feedback elements » ?
- 3- Que représente physiquement le bloc « Aircraft dynamics » ?

On représente la dynamique de l'avion dans le plan longitudinal par les relations :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{u} \\ -u_0 \Delta \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u & -g \\ Z_u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_T \end{pmatrix}$$

Qui sont obtenues par le Principe Fondamental de la Dynamique projeté suivant les axes longitudinal ( $X$ ) et vertical ( $Z$ ) de l'avion, linéarisé autour d'un état d'équilibre pour lequel on a une certaine :

- vitesse longitudinale  $u_0$
- assiette  $\theta_0$
- position de la gouverne de profondeur  $\delta_{e0}$
- position de la manette des gaz  $\delta_{T0}$

Et les variations de ces différents paramètres par rapport à leur valeur à cet équilibre :

$$\begin{aligned} \Delta u &= u - u_0 \\ \Delta \theta &= \theta - \theta_0 \\ \Delta \delta_e &= \delta_e - \delta_{e0} \\ \Delta \delta_T &= \delta_T - \delta_{T0} \end{aligned}$$

Rappel :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{pmatrix}$$

Nb :

On considère dans notre exercice que la vitesse verticale  $w$  est constante ( $\dot{w} = 0$ ). C'est la raison pour laquelle la deuxième équation (en  $Z$ ) n'est pas en  $\Delta \dot{w}$  mais simplement en  $-u_0 \Delta \dot{\theta}$  qui n'est autre que la force centrifuge (divisée par la masse de l'avion).

Nous allons nous intéresser à l'impact d'une variation de la position de la manette des gaz sur la vitesse longitudinale de l'avion.

On considère que le pilote ne touche pas à la gouverne de profondeur. On supposera de plus que :

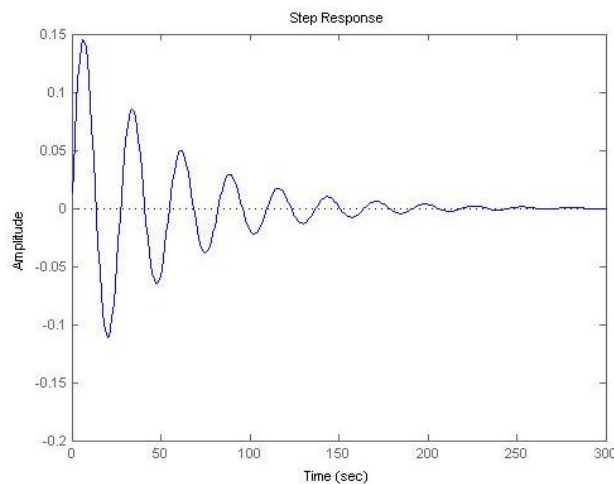
$$X_{\delta_T} = 0,038 \frac{ft/s^2}{deg} \text{ et } Z_{\delta_T} = 0 \frac{ft/s^2}{deg}$$

- 4- Quelle hypothèse fait-on dans ce cas ?
- 5- Donner l'expression de la fonction de transfert qui nous intéresse.

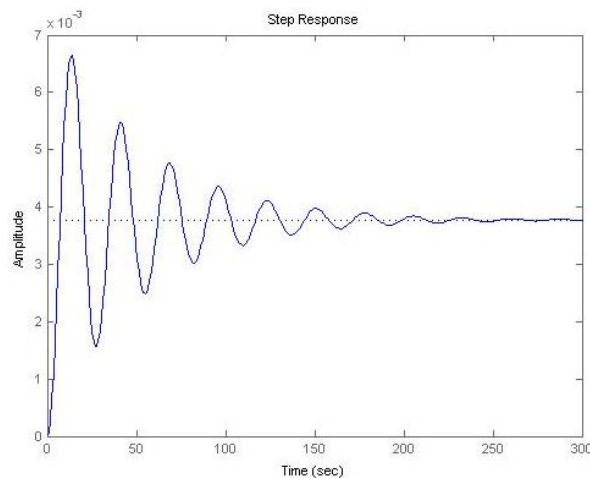
On donne la fonction de transfert avec les valeurs numériques :

$$\frac{\Delta u(s)}{\Delta \delta_T(s)} = \frac{0,038s}{s^2 + 0,039s + 0,053}$$

Pour un échelon unitaire on obtient :



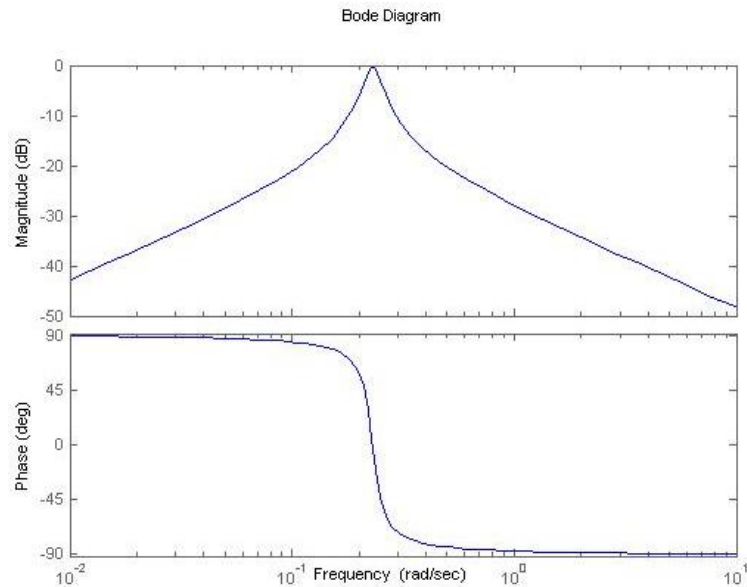
Réponse en vitesse



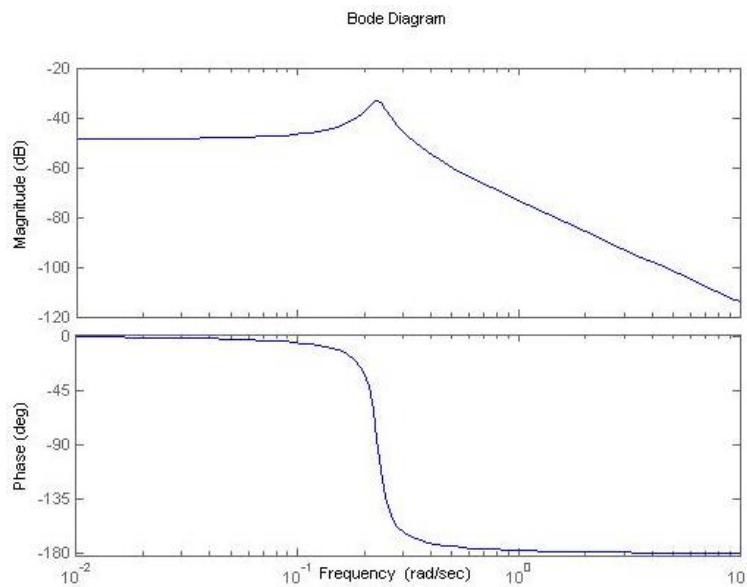
Réponse en assiette obtenue en calculant la fonction de transfert sur l'assiette  $\frac{\Delta \theta(s)}{\Delta \delta_T(s)}$

6- Expliquer ce qu'il se passe, et retrouver mathématiquement la valeur de la période des oscillations.

En traçant le diagramme de Bode des fonctions de transfert sur la vitesse et l'assiette on a :



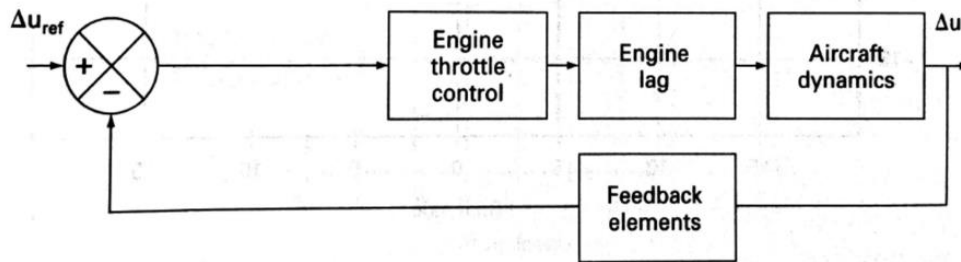
En vitesse



En assiette

7- Que se passe-t-il si la manette des gaz oscille lentement ? Rapidement ?  
Quelle conclusion peut-on en tirer vis-à-vis de notre système de maintien de la vitesse ?

Retour à notre système de maintien de la vitesse, en tenant compte cette fois du comportement du moteur au travers du bloc « Engine Lag » :



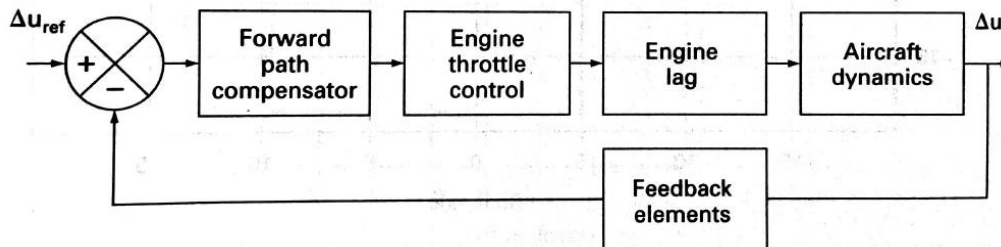
On considère le bloc « Feedback éléments » comme étant un gain pur  $k_{fb}$ .

- 8- Soulever de manière globale les potentiels problèmes que l'on peut rencontrer si l'on fait fonctionner ce système sur cet avion.

**Nb:**

On donne en annexes la réponse de chaque bloc à un échelon unitaire.

Finalement, nous rajoutons un correcteur avant l'application de l'ordre à la manette sous la forme d'un bloc « Forward path compensator » :



Sachant que l'on a les fonctions de transfert :

-« Forward path compensator » :

$$k_a \frac{s + 0,1}{s}$$

Avec  $k_a$  une constante.

-« Engine throttle control » :

$$\frac{10}{s + 10}$$

-« Engine lag » :

$$\frac{1}{s + 0,1}$$

-« Aircraft dynamics » :

$$\frac{0,038s}{s^2 + 0,039s + 0,053}$$

-« Feedback elements » :

$$k_{fb}(10s + 1)$$

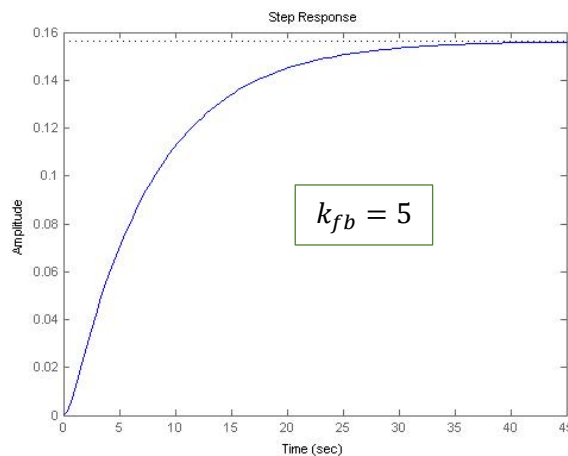
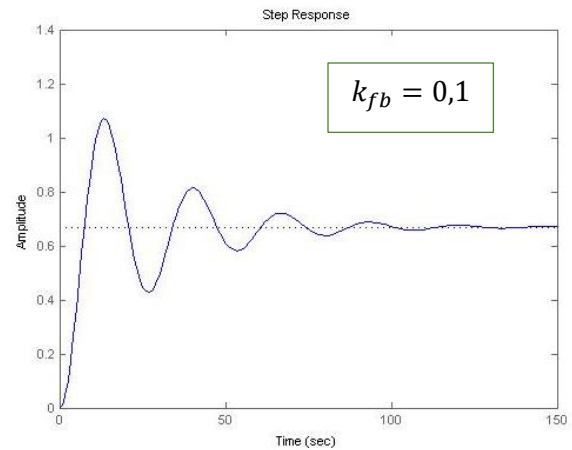
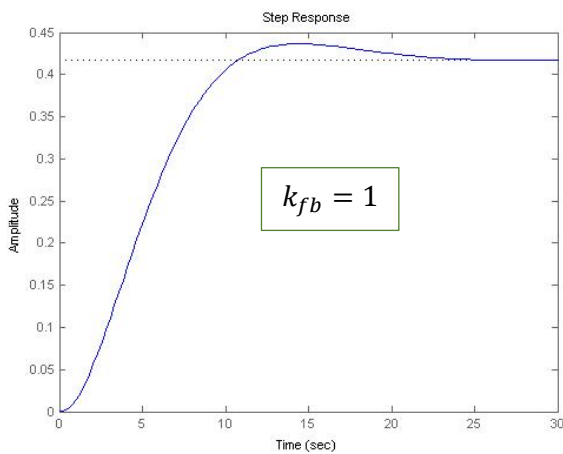


- 9- Que fait ce nouveau « Feedback éléments » ?  
 Montrer que la nouvelle fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{0,38k_a}{s^3 + 10,04s^2 + (0,44 + 3,8k_a k_{fb})s + 0,53 + 0,38k_a k_{fb}}$$

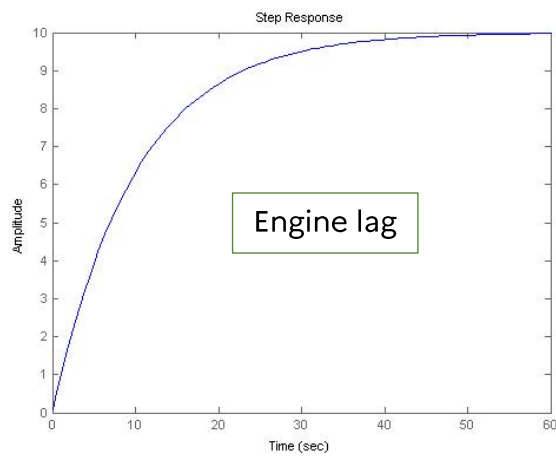
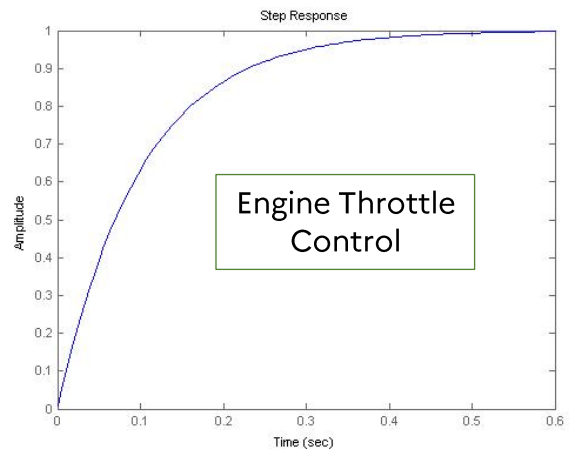
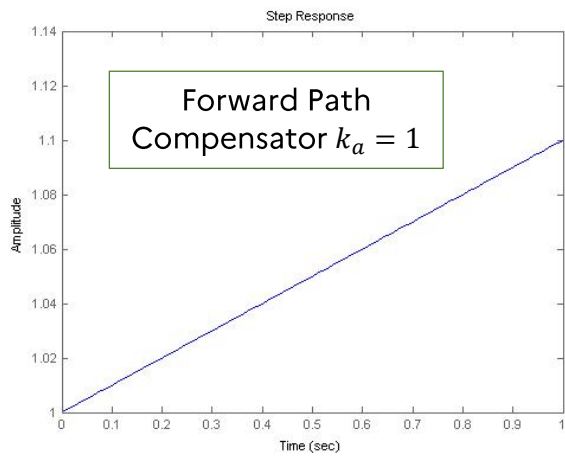
- 10- Donner l'expression de la valeur finale de la vitesse à une entrée en échelon unitaire.  
 Comment doivent être les gains  $k_a, k_{fb}$  pour un système de maintien de la vitesse sans erreur ?

On fixe le gain  $k_a = 1$ . Avec différentes valeurs de gain  $k_{fb}$  on a :



- 11- Quels sont les avantages/inconvénients de chaque jeu de gains.

Annexes :



## Exercice 5 : Freinage d'un obus par la neige

Un obus de **diamètre**  $d = 100 \text{ mm}$  et de **masse**  $m = 10 \text{ kg}$  pénètre dans la neige tassée à :

$$T_{\text{neige}} = 0^\circ\text{C}$$

Il s'enfonce de  $l = 5 \text{ m}$  sans éclater selon une trajectoire rectiligne selon l'axe **AB**. Le mouvement de l'obus est **hélicoïdal**; quand il rentre en contact avec la neige au point **A**, sa vitesse de rotation autour de son axe est :

$$\omega_A = 200 \text{ rad/s}$$

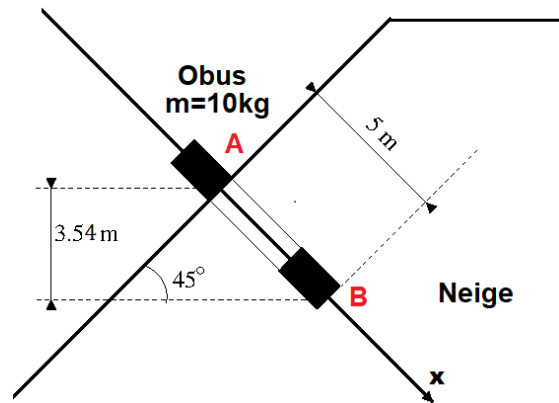
Sa vitesse de translation :

$$v_A = 100 \text{ m/s.}$$

Sa température est :

$$T_{\text{obus}} = 40^\circ\text{C}$$

Le repère défini par  $(AB\vec{x})$ , a pour origine spatiale et temporelle le point **A** ( $x_A = 0 \text{ m}, t_A = 0 \text{ s}$ ).



### Données utiles :

- Pour le calcul du moment d'inertie  $J_\Delta$  on assimilera l'obus à un cylindre plein de 100mm de diamètre :  $J_\Delta = \frac{mD^2}{4}$
- La quantité de chaleur dégagée par un objet chaud en contact avec un milieu froid est  $\Delta Q = mc_p\Delta T$  (avec  $m$ , la masse de l'objet,  $c_p$  sa chaleur spécifique à pression constante (en  $\frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ ) et  $\Delta T$  l'écart de température.
- L'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe  $\Delta$  est :

$$E_{\text{cin}} = J_\Delta \frac{\omega_\Delta^2}{2}$$

Avec  $\omega_\Delta$  sa vitesse angulaire.

- Théorème du moment cinétique (ou de l'accélération angulaire) :

$$\sum M_{\Delta, F_{\text{ext}}} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt}$$

- Théorème de l'énergie cinétique :  $\Delta E_{\text{cinétique}} \Big|_A^B = \sum W_{F_{\text{ext}}} \Big|_A^B + \sum W_{F_{\text{int}}} \Big|_A^B$

On souhaite dans un premier temps calculer la force de frottement longitudinale notée  $\vec{R}$  associée au frottement obus/neige.

**a/ Déterminer**  $\gamma$ , l'accélération de l'obus en fonction des forces s'exerçant sur celui-ci : la force de frottement Obus/neige notée  $\vec{R}$  (frottement solide) et le poids noté  $\vec{P}$ . On projettera sur l'axe  $(AB\vec{x})$ .

**b/**Exprimer les équations du mouvement qui en découlent et en déduire une expression de  $\gamma$  en fonction de  $v_A$  et  $t_B$  ( $t_B$  étant le temps que met l'obus pour arriver à son point d'arrêt B).

**c/**Déduire des questions **a/** et **b/** l'expression et la valeur numérique de la force de frottement  $|\vec{R}|$ .

Nous souhaitons maintenant calculer le couple de frottement noté  $C_f$ .

**d/**Etablir les équations du mouvement autour de l'axe de l'obus, sachant que le seul moment s'appliquant à l'obus est le couple de frottement  $C_f$ .

**e/**Après intégration des équations du mouvement, déterminer l'expression du couple de frottement  $C_f$ , ainsi que sa valeur numérique (en supposant que la rotation s'arrête en même temps que la translation).

Estimation de la masse de neige passant de l'état solide à l'état liquide.

- *le travail des forces intérieures correspond à la somme du travail de la force de frottement  $R$  et du travail du couple de frottement  $C_f$ . Il s'agit du **travail de frottement**.*
- *Le travail des forces extérieures correspond uniquement au travail du poids de l'obus.*

**f/**Exprimer la variation de l'énergie cinétique  $\Delta E_{cinétique}|_A^B$  de l'obus en fonction de  $m, J_\Delta, v_A$  et  $\omega_A$ . Donner une valeur numérique.

**g/**Exprimer le travail des forces extérieures  $\sum W_{F_{ext}}|_A^B$  puis calculer la valeur numérique associée.

**h/**Déduire des questions **f/** et **g/** la valeur numérique de  $\sum W_{F_{int}}|_A^B$  correspondant au travail de frottement.

On souhaite maintenant estimer la masse de neige qui a fondu suite au contact avec l'obus.

- *Le **travail de frottement** est entièrement transformé en chaleur et cédé à la neige! Si l'on souhaite estimer l'énergie totale cédée à la neige, il faut aussi ajouter la chaleur dégagée par l'échange thermique entre l'obus et la neige dû à l'écart de température entre les deux milieux.*

**i/**Calculer la quantité de chaleur dégagée  $\Delta Q$  sachant que la chaleur spécifique du matériau constituant l'obus est  $c_p = 0.48 \frac{J}{g.K}$ . En déduire l'énergie totale cédée par l'obus à la neige.

**j/** Sachant que la chaleur massique de fusion de la neige est  $c = 334 kJ/kg$ . Estimer la masse de neige qui a fondu suite au contact avec l'obus.

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

-----

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »

-----

SESSION DU 14 NOVEMBRE 2022

-----

**CORRIGÉ ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES**

---

Durée: 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée --  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur ce document

Document validé par :

Nom :

Date : 02/11/2022

Signature :

## Exercice 1: Analyse dimensionnelle

Dans un fluide, une bille de rayon  $R$ , animée d'une vitesse  $v$  est soumise à une force de frottement donnée par l'expression :

$$F = -6\pi\eta Rv$$

1.a/ A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de  $\eta$ .

$$[F] = [\eta] \cdot [R] \cdot [v] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$
$$[\eta] = \frac{[F]}{[R] \cdot [v]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2 \cdot T^{-1}} = \frac{M}{T \cdot L}$$

Ainsi,  $\eta$  s'exprime en  $\frac{kg}{m \cdot s}$ .

1.b/ Soit  $\rho$  la masse volumique du fluide, proposer un nombre **sans dimension** en considérant l'expression suivante (On le notera arbitrairement  $N$ ) :

$$N = \rho \cdot \eta^B \cdot R^C \cdot v^D$$

$$[N] = [\rho] \cdot [\eta]^B \cdot [R]^C \cdot [v]^D = \frac{M}{L^3} \cdot \frac{M^B}{T^B \cdot L^B} \cdot L^C \cdot \frac{L^D}{T^D} = M^{(1+B)} \cdot L^{(C+D-B-3)} \cdot T^{-(D+B)}$$

Pour que le nombre  $N$  soit sans dimension, il faut :

$$\begin{cases} 1 + B = 0 \\ D + B = 0 \\ C + D - B - 3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ D = -B = 1 \\ C = 3 - D + B = 1 \end{cases}$$

On obtient le nombre sans dimension suivant :

$$N = \frac{\rho \cdot R \cdot v}{\eta}$$

1.c/ A quel célèbre nombre sans dimension correspond  $N$  ? Quelle est la signification physique de ce nombre ?

On reconnaît le nombre de Reynolds qui compare les forces d'inertie aux forces de frottement visqueux. Il permet de caractériser la nature et le régime d'un écoulement (régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire ou encore régime turbulent).

→ Régime de Stokes :  $Re \ll 1$  : les forces visqueuses dominent l'écoulement. Ce régime se rencontre principalement dans la micro-fluidique

→ si  $Re$  augmente, les forces d'inertie ne sont plus négligeables, selon la valeur du nombre de Reynolds, on sera dans le cas d'un régime laminaire ou turbulent. Il existe une valeur seuil du nombre de Reynolds appelé Reynolds critique au-delà duquel le régime est turbulent.

## Exercice 2 : Etude de l'atmosphère en équilibre

Soit de l'air en équilibre dans le référentiel terrestre  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Chaque élément de ce fluide est en équilibre sous l'action des forces extérieures à cet élément. Ces forces sont de deux types :

- Les forces de pression
- La force due au champ de pesanteur (que l'on considère comme uniforme)

Le champ de pesanteur dans le référentiel terrestre est donné par :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z \quad \left( \text{avec } g = 9.81 \frac{m}{s^2} \right)$$

Pour un fluide au repos situé dans un champ de pesanteur uniforme l'équation d'Euler prend la forme suivante (hydrostatique des fluides).

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

l'état de l'atmosphère est caractérisé par sa pression  $p(x, y, z)$  et sa température  $T(x, y, z)$ .

### Rappels utiles :

1 m = 3.28 ft

Constante des gaz associée à l'air:  $r = 287 \frac{J}{kg.K}$

Loi des gaz parfaits reliant pression, masse volumique et température :  $p = \rho r T$

On rappelle la définition du Gradient d'un scalaire  $f$  :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

**a/** L'air étant considéré comme un gaz parfait, calculer sa masse volumique  $\rho_0(p_0, T_0)$  dans les conditions normales de pression  $p_0 = 101325 Pa$  et de température  $T_0 = 288 K$ .

$$\rho = \frac{p}{rT} = \frac{101325}{287 \times 288} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

**b/** En considérant l'équation de l'hydrostatique des fluides, montrer que la pression  $p(x,y,z)$  ne dépend que de  $z$  et établir l'équation différentielle permettant de déterminer  $p(z)$  en fonction de  $p, T, r$  et  $g$ .

$$\vec{\nabla}P = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \longrightarrow p(x, y, z) = p(y, z) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \longrightarrow p(y, z) = p(z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\rho g \longrightarrow dp = -\rho g \cdot dz \end{cases}$$

Et finalement,

$$dp = -\frac{p}{rT} g \cdot dz \longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT} \cdot dz$$

### PARTIE 1: Atmosphère isotherme

Dans un premier temps, on considère une atmosphère **isotherme**  $T = T_0 = 288 \text{ K}$ .

**c/** Dans le cas d'une atmosphère isotherme, montrer que la pression  $p$  varie avec l'altitude  $z$  selon une loi du type :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H_0}}$$

Où  $H_0$  est une longueur que l'on nomme Hauteur d'échelle de l'atmosphère que l'on explicitera en fonction de  $T_0, r$  et  $g$ .

Atmosphère isotherme,  $T = T_0 = 288 \text{ K} = \text{constante}$ . L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT_0} \cdot dz$$

$$d(\ln p) = -\frac{g}{rT_0} \cdot dz$$

$$[\ln p]_{p_0}^p = -\frac{g}{rT_0} [z]_0^z$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{g}{rT_0} z$$

Et finalement,

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{rT_0} z} = p_0 e^{-\frac{z}{H_0}}$$

Avec  $H_0 = \frac{rT_0}{g}$ .



**d/** Donner la valeur numérique de la hauteur d'échelle  $H_0$  de l'atmosphère **isotherme**.

La hauteur d'échelle en atmosphère isotherme est de  $H_0 = \frac{287 \times 288}{9.81} = 8425.7m$

**e/** Calculer l'expression littérale du gradient vertical de pression  $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ . Puis la valeur numérique de ce gradient pour  $z = 2500 m$ .

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=2500m} = -\frac{p_0}{H_0} e^{-\frac{z}{H_0}} = \frac{101325}{8425.7} e^{-\frac{2500}{8425.7}} = -8.94 Pa/m$$

**f/** A partir de l'expression du gradient de pression trouvé en question précédente, donner pour l'altitude  $z = 2500 m$  l'échelle de la dimension verticale  $L_z$  sur laquelle la pression varie de **1hpa**. On exprimera  $L_z$  en **m** et en **ft**

On a

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=2500m} = -8.94 \frac{Pa}{m} = -8.94 \times 10^{-2} \frac{hpa}{m}$$

$$L_{z=2500m} = \frac{1}{\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right|} = 11.18 \frac{m}{hpa} = 36.7 \frac{ft}{hpa}$$

## PARTIE 2 : Atmosphère en équilibre adiabatique sec

On considère maintenant l'atmosphère en équilibre **adiabatique sec** caractérisé à toute altitude par la relation  $p = K\rho^\gamma$ , avec  $K$  une constante et  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$  est le coefficient polytropique du gaz mis en jeu. On considère toujours que l'état de l'air est régi par la loi des gaz parfaits.

**Remarque :** on parle d'atmosphère en équilibre adiabatique sec lorsque les effets de l'humidité sont négligés.

**g/** Montrer qu'en considérant ce modèle d'atmosphère,  $p(z)$  et  $T(z)$  vérifient les relations suivantes :

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)$$

On revient sur l'équation différentielle initiale :

$$dp = -\rho g \cdot dz = -\left(\frac{p}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g dz$$

$$\frac{dp}{p^{1/\gamma}} = -\frac{g}{K^{1/\gamma}} dz$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} d\left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) = -\frac{g}{K^{1/\gamma}} dz$$

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{K^{1/\gamma}} z \quad \longrightarrow \quad p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{K^{1/\gamma}} z$$

$$p(z) = \left(p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{K^{1/\gamma}} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} K^{\frac{1}{\gamma}}} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Mais

$$K = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad \longrightarrow \quad K^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0} = r T_0 p_0^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} = r T_0 p_0^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)}$$

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{p_0^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} p_0^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} r T_0} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{r T_0} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$K = \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p r^\gamma T^\gamma}{p^\gamma} = \frac{r^\gamma T^\gamma}{p^{\gamma-1}} \quad \longrightarrow \quad \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = K'$$

$$\frac{T_0}{p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \longrightarrow \quad \frac{T(z)}{T_0} = \left(\frac{p(z)}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Et finalement,

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)$$

**h/** Calculer l'expression littérale du gradient vertical de **pression**  $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ . Puis les valeurs numériques de ce gradient pour  $z = 0 \text{ m}$ ,  $z = 2500 \text{ m}$  et  $z = 5000 \text{ m}$ . Commenter les écarts entre les valeurs obtenues.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p_0}{H_0} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{p_0}{H_0} = \frac{101325}{8425.7} = -12.025 \text{ pa/m}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=2500} = -12.025 \left(1 - \left(\frac{0.4}{1.4}\right) \frac{2500}{8425.7}\right)^{\frac{1}{0.4}} = -9.64 \text{ pa/m}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=5000} = -12.025 \left(1 - \left(\frac{0.4}{1.4}\right) \frac{5000}{8425.7}\right)^{\frac{1}{0.4}} = -7.56 \text{ pa/m}$$

**i/** A partir des gradients de pression trouvés dans la question précédente, donner pour l'altitude  $z = 2500 \text{ m}$  l'échelle de la dimension verticale  $L_z$  sur laquelle la pression varie de **1hpa**. On exprimera  $L_z$  en **m** et en **ft**.

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=2500} = -9.63 \frac{\text{pa}}{\text{m}} = -9.64 \times 10^{-2} \frac{\text{hpa}}{\text{m}}$$

$$L_{z=2500\text{m}} = \frac{1}{\left|\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=2500}\right|} = 10.38 \frac{\text{m}}{\text{hpa}}$$

**j/** Calculer l'expression littérale du gradient vertical de température  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)$  et donner sa valeur numérique en  $\frac{\text{K}}{\text{km}}$ .

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_0}{H_0} = -\frac{0.4}{1.4} \frac{288}{8425.7} = 9.77 \times 10^{-3} \text{ K/m} = 9.77 \text{ K/km}$$

### **PARTIE 3 : Atmosphère en équilibre adiabatique humide : Modèle d'atmosphère standard :**

Le modèle d'atmosphère standard est en équilibre **adiabatique humide**. Dans ce cas on considère les effets de la présence de vapeur d'eau dans l'air. Cette vapeur est inerte dans le modèle d'atmosphère en équilibre adiabatique sec. Ainsi le modèle adiabatique humide tient compte de la possible transition de phase de la vapeur d'eau dans les couches froides (condensation en gouttelettes).

- ⇒ L'évaporation de gouttes liquides consomme de l'énergie et a pour effet de refroidir le mélange gazeux (air) dans lequel elles se trouvent.
- ⇒ Au contraire, la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air restitue de l'énergie et réchauffe le mélange gazeux.

Le modèle d'atmosphère standard est en équilibre **adiabatique humide**. Ce modèle implique un gradient vertical de température de  $-6.5 \frac{K}{km}$  (pour  $z < 11 km$ ).

**k/** Commenter l'écart entre le gradient vertical de température en atmosphère sèche avec le gradient vertical de température en atmosphère humide.

La condensation de la vapeur d'eau dans les couches froides accroît l'énergie du mélange gazeux qui se réchauffe et implique donc un gradient thermique plus faible que dans le cas de l'air sec.

Pour une atmosphère **adiabatique humide**. On donne :

$$L_{z=2500m} = 10.6 m = 34 ft.$$

**l/** Une sonde de pression statique mesure une pression de **540 hpa**. Estimer l'altitude associée en considérant les trois modèles d'atmosphère  $L_{z(humide)}$ ,  $L_{z(sec)}$  et  $L_{z(isotherme)}$ . Commenter l'écart entre les différentes valeurs obtenues.

Pour une pression de 540 hpa, si on considère une pression de 1013.25 hpa au sol. On obtient les altitudes estimées suivantes :

$$z_{isotherme}=5291 m, z_{humide}=5016 m, z_{sec}=4912 m$$

La valeur la plus réaliste est  $z_{humide}$ , l'utilisation d'un modèle adiabatique sec sous-estime l'altitude alors que l'atmosphère isotherme surestime l'altitude (pas de gradient thermique, température plus élevée que la réalité dès lors qu'on est plus au sol).

### Exercice 3 : Décollage d'un porte-avions

Sur le pont d'un porte-avions, un biréacteur est prêt à être catapulté. Son train avant est accroché à une catapulte. On étudie le décollage en trois phases :

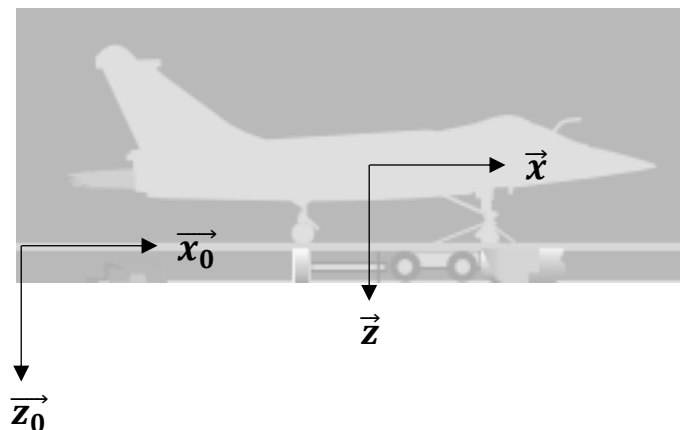
- 1- L'avion est fixe sur le pont, poussée des moteurs à leur valeur maximale
- 2- La catapulte est lancée à accélération constante sur toute sa course
- 3- Au moment où l'avion se détache de la catapulte, il effectue une rotation jusqu'à obtenir son assiette de décollage



[www.colsbleus.fr](http://www.colsbleus.fr)

#### Données :

- Course de la catapulte : 75 m
- Accélération de l'avion (catapulte) pendant la phase de catapultage :  $a = 4 g$
- Poussée maximale d'un moteur :  $T_{moteur} = 75 \text{ kN}$
- Masse de l'avion :  $m = 12 \text{ tonnes}$
- On se situe au niveau de la mer :  $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$
- On définit les axes longitudinal et vertical avion ( $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ ) et terrestre ( $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$ ) :

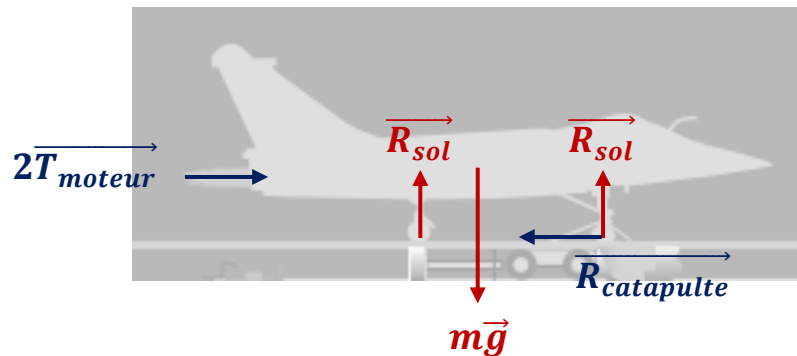


- Le repère terrestre est supposé Galiléen.
- On définit enfin les axes air ( $\vec{x}_a$  et  $\vec{z}_a$ ), on a toujours  $\vec{V} = V\vec{x}_a$ .
- La poussée des moteurs est négligeable suivant l'axe vertical avion.
- Caractéristiques aérodynamiques de l'avion :
  - Calage des ailes par rapport à l'axe longitudinal avion :  $\gamma_{ailes} = 5^\circ$
  - Coefficient de portance :  $C_z = 0,1\alpha$  avec  $\alpha$  l'incidence en degré
  - Coefficient de trainée :  $C_x = 0,01 + 0,12C_z^2$
  - Surface des ailes :  $S = 46 \text{ m}^2$
  - Trainée fuselage :  $(C_x S)_f = 1 \text{ m}^2$
- On introduit le facteur de charge total  $n_t$  par la relation :

$$\vec{n}_t = \frac{\vec{F}_a + \vec{T}}{mg}$$

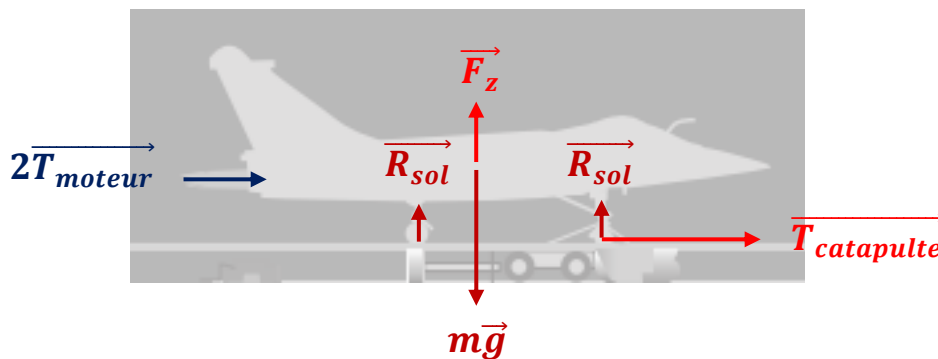
Où  $\vec{F}_a$  est la résultante des efforts aérodynamiques s'exerçant sur l'avion et  $\vec{T}$  la poussée des moteurs.

1- Faire un schéma des forces qui s'appliquent sur l'avion pendant la phase 1.



L'avion est fixe, la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle.  
La réaction du sol contre le poids et la catapulte empêche l'avion d'accélérer en contrant la poussée des moteurs.

2- Faire un schéma des forces qui s'appliquent sur l'avion pendant la phase 2 (on néglige toute forme de trainée **pendant cette phase** pour des raisons de simplification), et donner la valeur de la force tractrice exercée par la catapulte sur l'avion.



Au fur et à mesure que l'avion gagne de la vitesse, la portance se substitue à la réaction du sol.

De son côté, la catapulte fait accélérer l'avion. Elle exerce une force telle que :

$$ma = 2T_{moteur} + T_{catapulte} = m \cdot 4g = 12\,000 \cdot (4,9,81)$$

Soit :

$$T_{catapulte} = 470,9 - 2,75 = 320,9 \text{ kN}$$

3- Montrer que la valeur de la vitesse en bout de pont est 276 km/h.

A accélération constante on a :

$$v = \int_0^t a dt = at \rightarrow OM = \int_0^{t_M} v dt = \frac{at_M^2}{2}$$

Où  $O$  désigne le point de lancement de l'avion, et  $M$  la position de l'avion à la fin du catapultage.

Or on sait que la course de la catapulte est de 75 m donc :

$$t_M = \sqrt{\frac{2 \cdot OM}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75}{4,9,81}} = 1,96 \text{ s}$$

Donc il vient que la vitesse est à cet instant :

$$v_M = at_M = 4,9,81 \cdot 1,96 = 76,7 \text{ m/s} = 276 \text{ km/h}$$

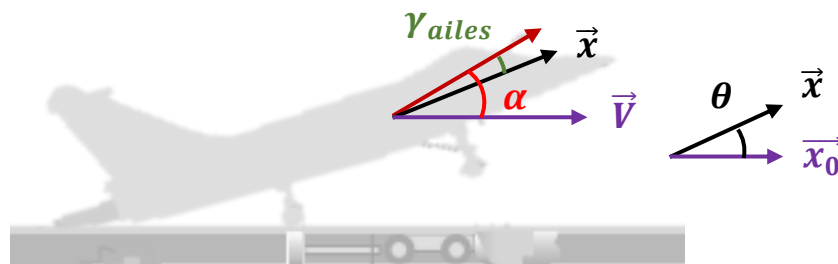
On passe dans la troisième phase : la rotation. On prend cette fois en compte la traînée de l'appareil (comme si elle apparaissait d'un coup).

L'avion pivote sur son train arrière jusqu'à ce qu'il obtienne une assiette lui permettant de quitter le pont. On suppose que le vecteur vitesse est toujours porté par l'axe  $\vec{x}_0$  pendant cette rotation, et que sa norme est constante (égale à 276 km/h).

- 4- Donner la relation entre incidence des ailes, assiette de l'avion et calage des ailes.

On a tout simplement :

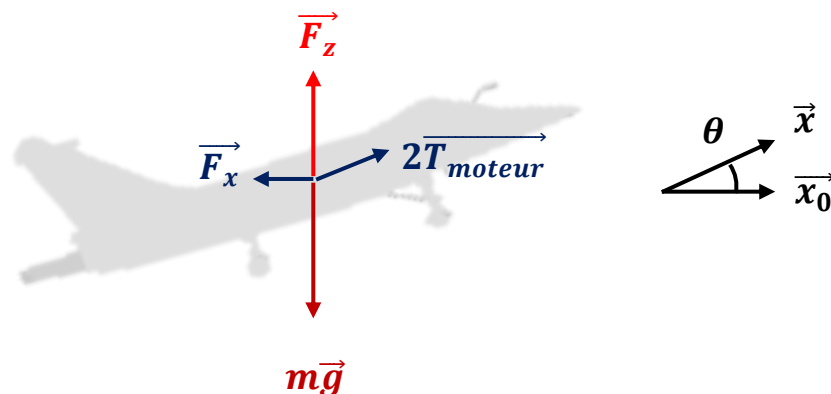
$$\alpha = \theta + \gamma_{ailes}$$



- 5- Faire un schéma des forces et donner la valeur de l'assiette au moment où l'avion décolle.

En déduire l'incidence des ailes.

On pourra supposer que l'assiette reste faible de sorte que  $\sin\theta \approx \theta$  (rad).



Au moment où l'avion décolle, la réaction du sol est complètement remplacée par la portance et la composante verticale de poussée des moteurs.

Bilan des forces :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_a + 2\overrightarrow{T_{moteur}}$$

L'avion quitte le pont lorsque la portance et la composante verticale de la poussée des moteurs compensent le poids de l'appareil :

$$(m\vec{g} + \vec{F}_a + 2\overrightarrow{T_{moteur}}) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Soit :

$$mg - F_z - 2T_{moteur}\sin\theta = 0$$

Avec :

$$F_z = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_z = \frac{1}{2}\rho SV^2 0,1\alpha = \frac{1}{2}\rho SV^2 0,1(\gamma_{ailes} + \theta)$$

Donc :

$$mg - \frac{1}{2}\rho SV^2 0,1(\gamma_{ailes} + \theta) - 2T_{moteur} \cdot \frac{2\pi}{360} \cdot \theta = 0$$

ATTENTION! Les angles sont ici pris en degrés. Puisque le coefficient de portance s'écrit  $C_z = 0,1\alpha$  avec l'incidence en degrés, on peut laisser les angles tels quels dans l'équation. En revanche, le sinus prend les angles en radians, d'où la conversion de degrés en radians  $\left(\frac{2\pi}{360}\right)$  pour la projection de la poussée des moteurs.

Soit :

$$mg = \frac{1}{2}\rho SV^2 0,1(\gamma_{ailes} + \theta) + 2T_{moteur} \cdot \frac{2\pi}{360} \cdot \theta$$

$$mg - \frac{1}{2}\rho SV^2 0,1\gamma_{ailes} = \left(\frac{1}{2}\rho SV^2 0,1 + 2T_{moteur} \cdot \frac{2\pi}{360}\right)\theta$$

Soit :

$$\theta = \frac{mg - \frac{1}{2}\rho SV^2 0,1\gamma_{ailes}}{\frac{1}{2}\rho SV^2 0,1 + 2T_{moteur} \cdot \frac{2\pi}{360}}$$

$$\theta = \frac{12\,000 \cdot 9,81 - \frac{1}{2} 1,225 \cdot 46,76,7^2 0,1 \cdot 1,5}{\frac{1}{2} 1,225 \cdot 46,76,7^2 0,1 + 2 \cdot 75\,000 \cdot \frac{2\pi}{360}} = 1,8^\circ$$

Et donc l'incidence vaut :

$$\alpha = 5 + 1,8 = 6,8^\circ$$

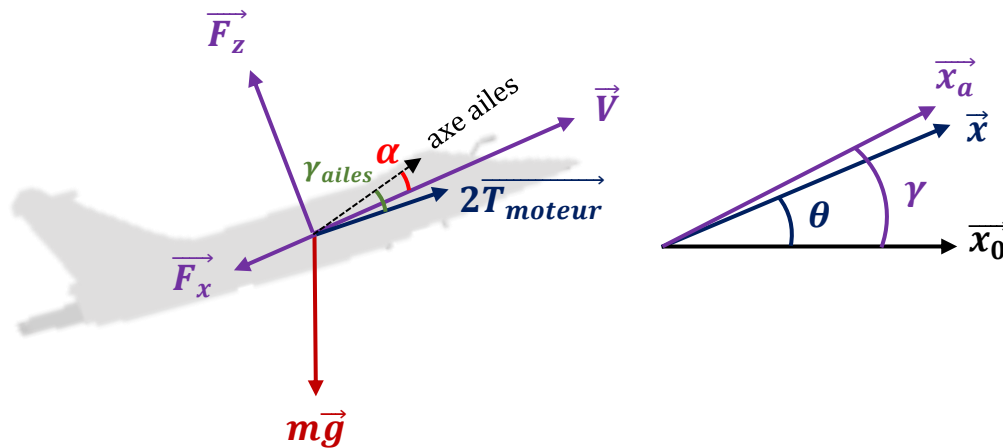


Une fois que l'avion a quitté le pont, le pilote affiche une poussée lui permettant de stabiliser sa vitesse et une pente  $\gamma$ .

- 6- Faire un schéma des forces et donner la relation vectorielle du Principe Fondamental de la Dynamique, ainsi que la relation entre les différents angles. En déduire l'expression des facteurs de charge  $n_x, n_z$  tels que :

$$\begin{aligned} n_x &= \vec{n}_t \cdot \vec{x} \\ n_z &= \vec{n}_t \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Si les conditions visuelles sont mauvaises, dans quelle situation peut-il penser se retrouver (autre que la montée) ?



La composante verticale de portance et la composante verticale de poussée moteurs compensent le poids et la composante verticale de traînée. La composante horizontale de poussée moteurs compense la composante horizontale de traînée et de portance.

On a le PFD sous forme vectorielle :

$$\vec{F}_a + 2\vec{T}_{moteur} + m\vec{g} = \vec{0}$$

Donc :

$$n_x = \frac{(\vec{F}_a + 2\vec{T}_{moteur}) \cdot \vec{x}}{mg} = -\frac{m\vec{g} \cdot \vec{x}}{mg} = \sin\theta > 0$$

Et :

$$n_z = \frac{(\vec{F}_a + 2\vec{T}_{moteur}) \cdot \vec{z}}{mg} = -\frac{m\vec{g} \cdot \vec{z}}{mg} = -\cos\theta$$

Cela peut donner l'impression d'être en train d'accélérer, puisqu'enfoncé dans le siège.

Remarque :

Le facteur de charge comme on l'utilise souvent correspond à :

$$n = -n_{za} = -\frac{(\vec{F}_a + 2\vec{T}_{moteur}) \cdot \vec{z}_a}{mg} = \frac{m\vec{g} \cdot \vec{z}_a}{mg} = \cos\gamma$$

On considère pour la question suivante que  $\sin\theta \approx \theta$  ;  $\sin(\gamma - \theta) \approx \gamma - \theta$  ;  $\cos(\gamma - \theta) \approx 1$  et la masse volumique est toujours égale à  $1,225 \text{ kg/m}^3$ .

7- Quelle doit être la poussée des moteurs pour assurer la montée à une vitesse de  $400 \text{ km/h}$  et telle que  $n_x = 0,5$ .

**Aide:**

-Lister les inconnues et les relations à disposition.

-Projeter les PFD dans le repère avion, en supposant que la composante de traînée suivant l'axe vertical est négligeable.

On liste les inconnues de notre problème :

$$\gamma, \theta, \alpha, T_{\text{moteur}}$$

Et les relations :

1-Angles :

$$\alpha = \theta - \gamma + \gamma_{\text{ailes}} \quad (1)$$

2-Projection du bilan des forces suivant les axes avion :

2-1-Selon l'axe horizontal :

$$(\vec{F}_a + 2\vec{T}_{\text{moteur}} + m\vec{g}) \cdot \vec{x} = 0$$

$$-F_z \sin(\gamma - \theta) - F_x \cos(\gamma - \theta) + 2T_{\text{moteur}} - mg \sin\theta = 0 \quad (2)$$

Avec l'hypothèse des petits angles :

$$-F_z(\gamma - \theta) - F_x + 2T_{\text{moteur}} - mg\theta = 0 \quad (2)$$

2-2-Selon l'axe vertical :

$$(\vec{F}_a + 2\vec{T}_{\text{moteur}} + m\vec{g}) \cdot \vec{z} = 0$$

$$-F_z \cos(\gamma - \theta) + F_x \sin(\gamma - \theta) + mg \cos\theta = 0 \quad (3)$$

Avec l'hypothèse des petits angles et composante de traînée négligeable :

$$-F_z + mg \cos\theta = 0 \quad (3)$$

Soit seulement trois relations pour quatre inconnues. Mais l'assiette est fixée puisqu'on nous donne :

$$n_x = \sin\theta \approx \theta = 0,5 \rightarrow \theta = 28,65^\circ$$

On peut ensuite déterminer l'incidence avec la troisième relation :

$$-F_z + mg \cos\theta = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \rho S V^2 0,1\alpha + mg \cos\theta = 0 \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{mg \cos \theta}{\frac{1}{2} \rho S V^2 C_{D0}} = \frac{12\,000 \cdot 9,81 \cdot \cos 0,5}{\frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 46 \cdot 111,1^2 \cdot 0,1} = 2,97^\circ \quad (3)$$

Puisque  $400 \text{ km/h} = 111,1 \text{ m/s}$ .

Puis on peut déterminer la pente par la première relation :

$$\gamma = -\alpha + \theta + \gamma_{ailes} \quad (1)$$

$$\gamma = -2,97 + 28,65 + 5 = 30,67^\circ \quad (1)$$

Il reste la poussée à déterminer par la seconde relation :

$$-F_z(\gamma - \theta) - F_x + 2T_{moteur} - mg \theta = 0 \quad (2)$$

$$2T_{moteur} = mg \theta + F_z(\gamma - \theta) + F_x \quad (2)$$

En sachant que :

$$F_z \approx mg \cos \theta = 12\,000 \cdot 9,81 \cdot \cos 0,5 = 103,3 \text{ kN}$$

Et avec :

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x \text{ ailes}} + F_{x \text{ fuselage}} = \frac{1}{2} \rho V^2 (S C_{Dx} + (C_{Dx})_f) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 111,1^2 (46 [0,01 + 0,12 \cdot 0,297^2] + 1) \\ &= 14,7 \text{ kN} \end{aligned}$$

Donc :

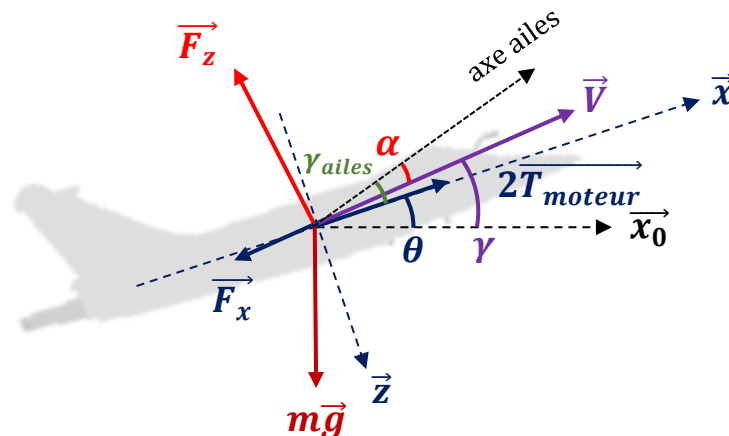
$$2T_{moteur} = 12\,000 \cdot 9,81 \cdot 28,6 \frac{2\pi}{360} + 103\,300 (30,67 - 28,6) \frac{2\pi}{360} + 14\,700 \quad (2)$$

Il ne faut pas oublier de convertir la pente en radians puisque venant d'un terme de projection.

Et finalement :

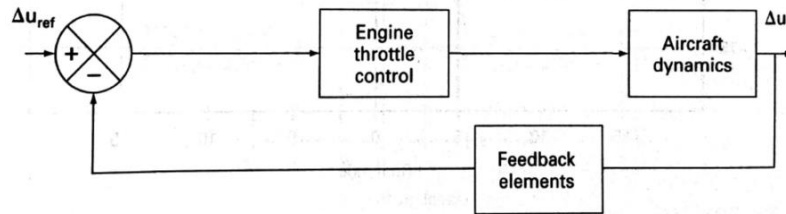
$$2T_{moteur} = 77,2 \text{ kN}$$

Et  $\theta = 28,65^\circ, \gamma = 30,67^\circ, \alpha = 2,97^\circ$  :



## Exercice 4 : Velocity Hold Control System

On souhaite disposer d'un système qui capture et maintient la vitesse d'un avion, choisie par le pilote. On pense d'abord à ce schéma de principe :



1- Expliquer de manière globale le principe de ce système.

La différence entre vitesse de consigne  $\Delta u_{ref}$  (ou plutôt l'écart de vitesse commandé par rapport à la vitesse initiale) et (écart) de vitesse réelle  $\Delta u$  (mesurée au travers du bloc « Feedback éléments ») a une action sur la manette des gaz (donc poussée moteur de l'avion), ce qui permet donc de modifier sa vitesse jusqu'à atteindre la vitesse consigne, si le système fonctionne.

2- Pourquoi est-il important de rajouter des « Feedback elements » ?

Sans ce bloc, impossible de connaître l'impact de la variation de poussée des moteurs sur la vitesse de l'avion, donc de savoir si l'on se rapproche ou éloigne de la vitesse consigne.

3- Que représente physiquement le bloc « Aircraft dynamics » ?

L'impact de la poussée des moteurs sur la vitesse de l'avion.

On représente la dynamique de l'avion dans le plan longitudinal par les relations :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{u} \\ -u_0 \Delta \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u & -g \\ Z_u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_T \end{pmatrix}$$

Qui sont obtenues par le Principe Fondamental de la Dynamique projeté suivant les axes longitudinal ( $X$ ) et vertical ( $Z$ ) de l'avion, linéarisé autour d'un état d'équilibre pour lequel on a une certaine :

- vitesse longitudinale  $u_0$
- assiette  $\theta_0$
- position de la gouverne de profondeur  $\delta_{e0}$
- position de la manette des gaz  $\delta_{T0}$

Et les variations de ces différents paramètres par rapport à leur valeur à cet équilibre :

$$\begin{aligned} \Delta u &= u - u_0 \\ \Delta \theta &= \theta - \theta_0 \\ \Delta \delta_e &= \delta_e - \delta_{e0} \\ \Delta \delta_T &= \delta_T - \delta_{T0} \end{aligned}$$

Rappel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{pmatrix}$$

Nb:

On considère dans notre exercice que la vitesse verticale  $w$  est constante ( $\dot{w} = 0$ ). C'est la raison pour laquelle la deuxième équation (en  $Z$ ) n'est pas en  $\Delta\dot{w}$  mais simplement en  $-u_0\Delta\dot{\theta}$  qui n'est autre que la force centrifuge (divisée par la masse de l'avion).

Nous allons nous intéresser à l'impact d'une variation de la position de la manette des gaz sur la vitesse longitudinale de l'avion.

On considère que le pilote ne touche pas à la gouverne de profondeur. On supposera de plus que :

$$X_{\delta_T} = 0,038 \frac{ft/s^2}{deg} \text{ et } Z_{\delta_T} = 0 \frac{ft/s^2}{deg}$$

4- Quelle hypothèse fait-on dans ce cas ?

On suppose que la poussée des moteurs n'a d'impact que sur la vitesse suivant l'axe longitudinal de l'avion. Le calage des moteurs est faible en quelque sorte (pas de forces transmises en vertical).

D'autre part on considère qu'ils ne transmettent pas de moments en tangage non plus.

5- Donner l'expression de la fonction de transfert qui nous intéresse.

On cherche la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta u}{\Delta \delta_T}$$

Or le système d'équations transformées en Laplace nous donne :

$$s\Delta u = X_u\Delta u - g\Delta\theta + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (1)$$

$$s\Delta\theta = -\frac{Z_u}{u_0}\Delta u \quad (2)$$

Donc :

$$s\Delta u = X_u\Delta u - \frac{g}{s} \left[ -\frac{Z_u}{u_0}\Delta u \right] + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (1)$$

$$s^2\Delta u = X_us\Delta u + g\frac{Z_u}{u_0}\Delta u + X_{\delta_T}s\Delta\delta_T$$

$$\left[ s^2 - X_us - g\frac{Z_u}{u_0} \right] \Delta u = [X_{\delta_T}s]\Delta\delta_T$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta\delta_T} = \frac{X_{\delta_T}s}{s^2 - X_us - g\frac{Z_u}{u_0}}$$

Et pour la réponse en assiette (non demandé) :

$$s\Delta u = X_u\Delta u - g\Delta\theta + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (1)$$

$$s\Delta\theta = -\frac{Z_u}{u_0}\Delta u \quad (2)$$

$$\Delta u = \frac{1}{s - X_u}[-g\Delta\theta + X_{\delta_T}\Delta\delta_T] \quad (1)$$

$$s\Delta\theta = -\frac{Z_u}{u_0}\frac{1}{s - X_u}[-g\Delta\theta + X_{\delta_T}\Delta\delta_T] \quad (2)$$

Donc :

$$u_0(s - X_u)s\Delta\theta = Z_u g\Delta\theta - Z_u X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (2)$$

$$\left[ (s - X_u)s - \frac{Z_u}{u_0}g \right] \Delta\theta = -\frac{Z_u}{u_0} X_{\delta_T}\Delta\delta_T$$

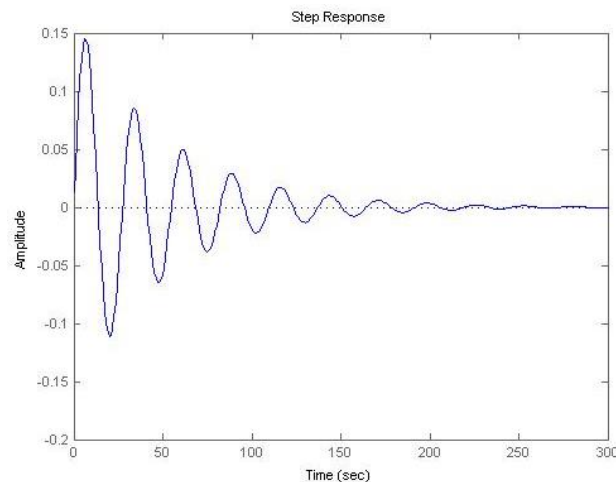
$$\left[ s^2 - X_u s - \frac{Z_u}{u_0}g \right] \Delta\theta = -\frac{Z_u}{u_0} X_{\delta_T}\Delta\delta_T$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\delta_T} = \frac{-\frac{Z_u}{u_0} X_{\delta_T}}{s^2 - X_u s - \frac{Z_u}{u_0}g}$$

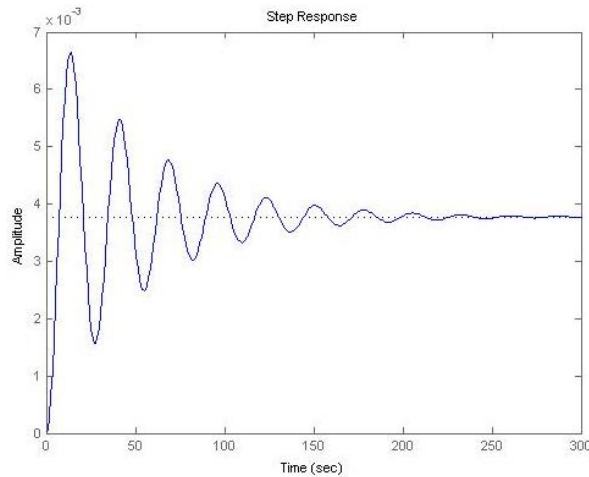
On donne la fonction de transfert avec les valeurs numériques :

$$\frac{\Delta u(s)}{\Delta\delta_T(s)} = \frac{0,038s}{s^2 + 0,039s + 0,053}$$

Pour un échelon unitaire on obtient :



Réponse en vitesse



Réponse en assiette obtenue en calculant la fonction de transfert sur l'assiette  $\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_T(s)}$

6- Expliquer ce qu'il se passe, et retrouver mathématiquement la valeur de la période des oscillations.

On s'aperçoit que suite à un échelon d'un degré à la manette des gaz, l'avion oscille lentement en vitesse et assiette (c'est le mode « Phugoïde »), mais surtout se stabilise à une nouvelle assiette en retrouvant la vitesse de départ...

Pour parler physique, on peut voir dans les équations utilisées les différentes forces prises en compte :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{u} &= X_u\Delta u - g\Delta\theta + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ -u_0\Delta\dot{\theta} &= Z_u\Delta u\end{aligned}$$

On voit que suivant l'axe longitudinal, la traînée, le poids et la poussée sont pris en compte. Suivant l'axe vertical, seulement la portance est prise en compte.

Les étapes sont donc :

- 1- Augmentation de poussée  $X_{\delta_T}\Delta\delta_T > 0 \rightarrow \Delta\dot{u} > 0$  : augmentation de vitesse
- 2- Augmentation de portance  $Z_u\Delta u < 0 \rightarrow \Delta\dot{\theta} > 0$  : augmentation d'assiette
- 3- Augmentation de traînée et composante de poids  $X_u\Delta u < 0 - g\Delta\theta < 0 \rightarrow \Delta\dot{u} < 0$  : diminution de vitesse
- 4- Etc

Finalement lorsque l'on applique une variation de poussée, l'avion atteint un nouvel état d'équilibre où l'incrément de poussée compense l'incrément de composante de poids suivant l'axe longitudinal due à la variation d'assiette.

Selon l'axe vertical avion, puisque la vitesse verticale  $w$  est censée être constante, au nouvel état d'équilibre on a toujours la même incidence ( $\alpha \approx \frac{w}{u}$ ), donc même portance. Elle compense donc toujours la composante de poids qui n'est pas censée varier puisqu'ici l'assiette est considérée faible (projection en cosinus).

Pour retrouver la période des oscillations il faut calculer les racines du dénominateur de la fonction de transfert  $s^2 + 0,039s + 0,053$ .

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 0,039^2 + 4(-0,053) = -0,21$$

Nous avons donc deux racines complexes conjuguées, signe que la dynamique se caractérise par un mouvement oscillatoire d'amortissement et pulsation donnés respectivement par la partie réelle et imaginaire de ces racines :

$$\lambda_{\pm} = \frac{X_u \pm i\sqrt{\Delta}}{2} = \lambda_{\pm} = -0,018 \pm 0,23.i$$

D'où l'amortissement :

$$\xi\omega_n = 0,018 \text{ s}^{-1} > 0$$

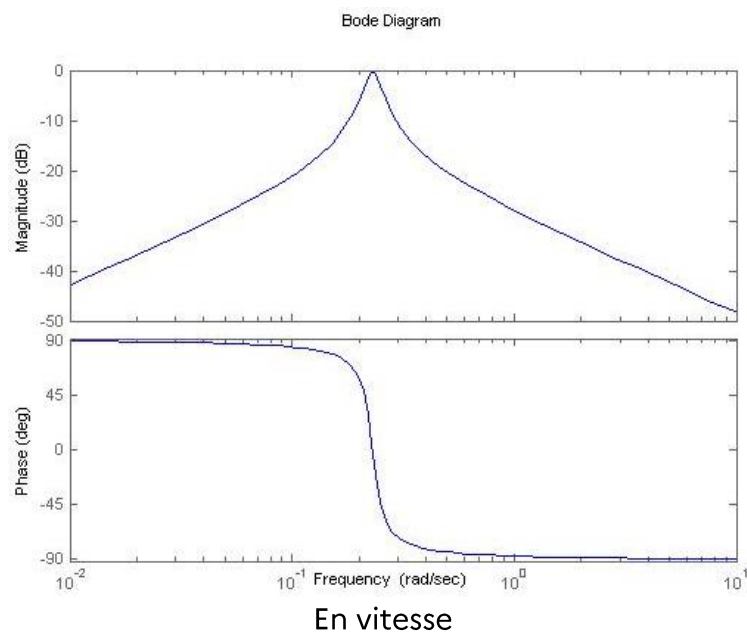
Et la pulsation :

$$\omega_p = 0,23 \text{ rad.s}^{-1}$$

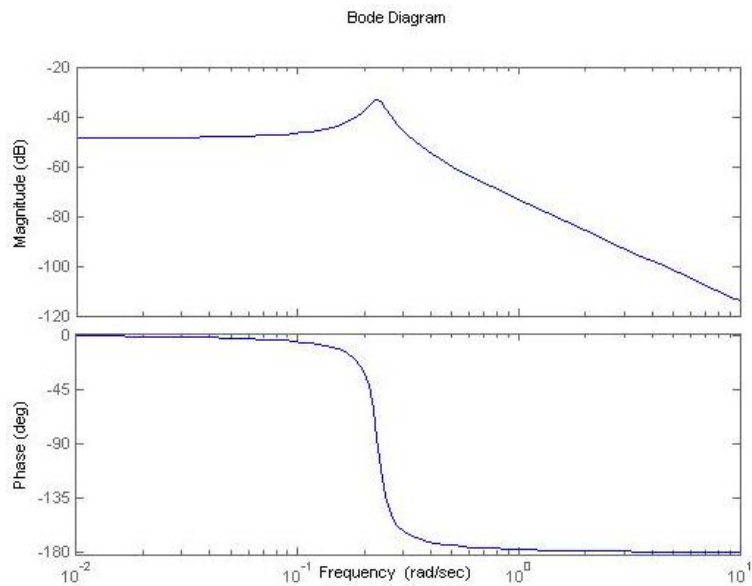
Soit une période de :

$$\rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = 27,4 \text{ s}$$

En traçant le diagramme de Bode des fonctions de transfert sur la vitesse et l'assiette on a :





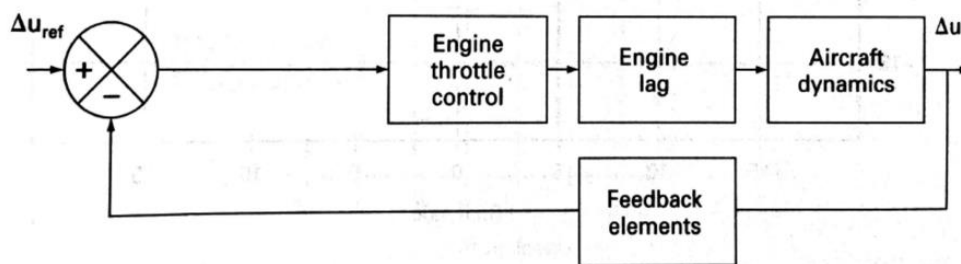


En assiette

- 7- Que se passe-t-il si la manette des gaz oscille lentement ? Rapidement ?  
 Quelle conclusion peut-on en tirer vis-à-vis de notre système de maintien de la vitesse ?

D'après le diagramme de Bode de la vitesse, on voit que le gain diminue aux basses et hautes fréquences, ce qui signifie que si le système corrige la vitesse en bougeant la manette des gaz lentement ou rapidement alors la vitesse ne changera pas. Pour les ordres basses fréquences seule l'assiette sera impactée d'après le second diagramme de Bode. A haute fréquence l'avion sera complètement insensible aux variations de poussée.

Retour à notre système de maintien de la vitesse, en tenant compte cette fois du comportement du moteur au travers du bloc « Engine Lag » :



On considère le bloc « Feedback éléments » comme étant un gain pur  $k_{fb}$ .

- 8- Soulever de manière globale les potentiels problèmes que l'on peut rencontrer si l'on fait fonctionner ce système sur cet avion.

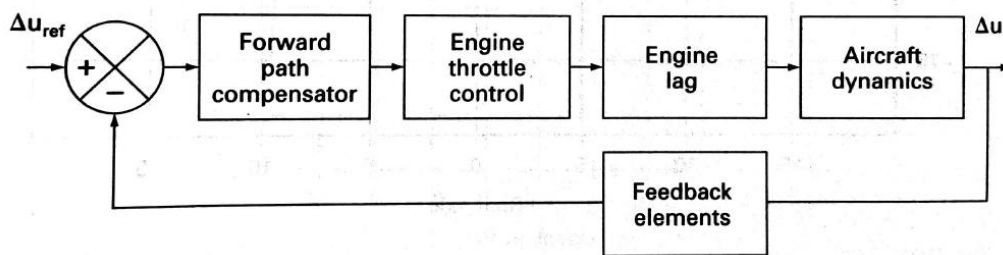
**Nb:**

On donne en annexes la réponse de chaque bloc à un échelon unitaire.

D'après l'étude de la dynamique de l'avion vue précédemment, on peut déjà douter du fait que le système puisse fonctionner en l'état. Il risque de commander une assiette plutôt qu'une vitesse.

De plus, on voit que les moteurs développent leur poussée de manière assez lente (temps caractéristique de l'ordre de 15 s). Combiné à la dynamique oscillatoire de l'avion (avec une période de l'ordre de 30 s), il est fort probable que la vitesse oscille elle aussi.

Finalement, nous rajoutons un correcteur avant l'application de l'ordre à la manette sous la forme d'un bloc « Forward path compensator » :



Sachant que l'on a les fonctions de transfert :

-« Forward path compensator » :

$$k_a \frac{s + 0,1}{s}$$

Avec  $k_a$  une constante.

-« Engine throttle control » :

$$\frac{10}{s + 10}$$

-« Engine lag » :

$$\frac{1}{s + 0,1}$$

-« Aircraft dynamics » :

$$\frac{0,038s}{s^2 + 0,039s + 0,053}$$

-« Feedback elements » :

$$k_{fb}(10s + 1)$$

- 9- Que fait ce nouveau « Feedback éléments » ?  
 Montrer que la nouvelle fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{0,38k_a}{s^3 + 10,04s^2 + (0,44 + 3,8k_a k_{fb})s + 0,53 + 0,38k_a k_{fb}}$$

En plus de prendre en compte la vitesse, le nouveau « Feedback éléments » prend également en compte l'accélération de l'avion pour un « meilleur calcul » de l'écart de vitesse qui sera transformé en ordre à la manette des gaz.

Si l'avion est en phase d'accélération, la vitesse réelle mesurée sera augmentée de manière fictive, diminuant ainsi l'écart de vitesse par rapport à la valeur consigne et donc l'ordre aux gaz calculé qui en découle, évitant les éventuels « overshoots ».

Afin de calculer la fonction de transfert, on utilise la formule de Black :

$$H(s) = \frac{k_a \frac{s + 0,1}{s} \frac{10}{s + 10} \frac{1}{s + 0,1} \frac{0,038s}{s^2 + 0,039s + 0,053}}{1 + k_a \frac{s + 0,1}{s} \frac{10}{s + 10} \frac{1}{s + 0,1} \frac{0,038s}{s^2 + 0,039s + 0,053} k_{fb}(10s + 1)}$$

$$H(s) = \frac{\frac{0,38k_a}{(s + 10)(s^2 + 0,039s + 0,053)}}{1 + \frac{0,38k_a}{(s + 10)(s^2 + 0,039s + 0,053)} k_{fb}(10s + 1)}$$

$$H(s) = \frac{0,38k_a}{(s + 10)(s^2 + 0,039s + 0,053) + 0,38k_a k_{fb}(10s + 1)}$$

$$H(s) = \frac{0,38k_a}{s^3 + 0,039s^2 + 0,053s + 10s^2 + 0,39s + 0,53 + 3,8k_a k_{fb}s + 0,38k_a k_{fb}}$$

$$H(s) = \frac{0,38k_a}{s^3 + (0,039 + 10)s^2 + (0,053 + 0,39 + 3,8k_a k_{fb})s + 0,53 + 0,38k_a k_{fb}}$$

$$H(s) = \frac{0,38k_a}{s^3 + 10,04s^2 + (0,44 + 3,8k_a k_{fb})s + 0,53 + 0,38k_a k_{fb}} = \frac{\Delta u(s)}{\Delta u_{réf}(s)}$$

- 10- Donner l'expression de la valeur finale de la vitesse à une entrée en échelon unitaire.  
 Comment doivent être les gains  $k_a, k_{fb}$  pour un système de maintien de la vitesse sans erreur ?

Le théorème de la valeur finale nous donne, pour un échelon unitaire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta u_{réf}(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$$

$$= \frac{0,38k_a}{0,53 + 0,38k_a k_{fb}}$$

Pour avoir une erreur nulle, il faut que :

$$\frac{0,38k_a}{0,53 + 0,38k_a k_{fb}} = 1$$

$$0,38k_a = 0,53 + 0,38k_a k_{fb}$$

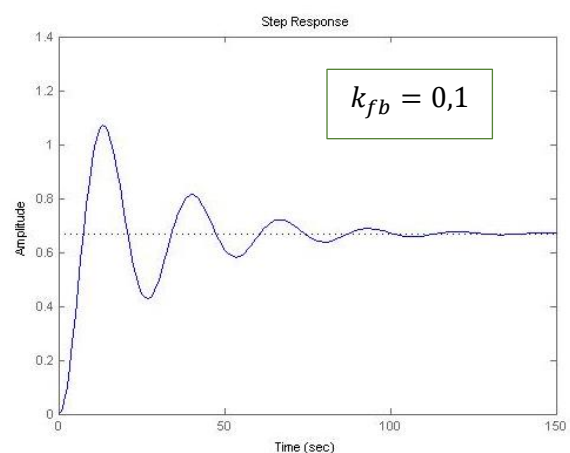
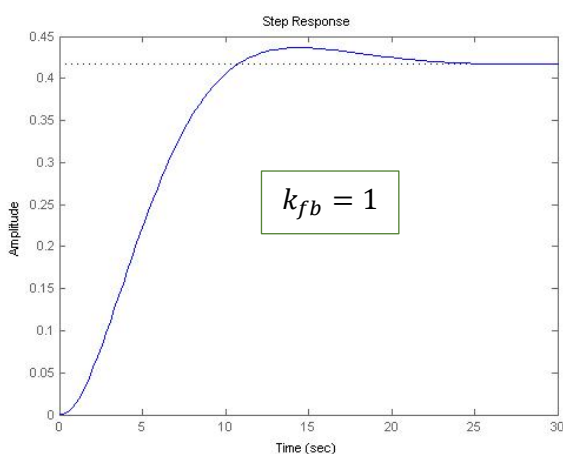
$$0,38k_a(1 - k_{fb}) = 0,53$$

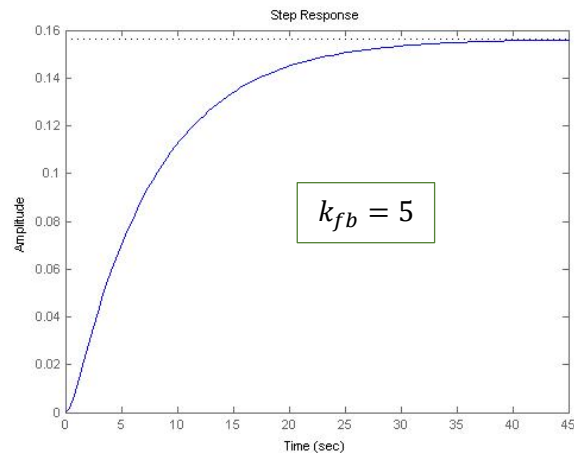
$$k_a = \frac{0,53/0,38}{1 - k_{fb}}$$

Ou :

$$k_{fb} = 1 - \frac{0,53}{0,38k_a}$$

On fixe le gain  $k_a = 1$ . Avec différentes valeurs de gain  $k_{fb}$  on a :





11- Quels sont les avantages/inconvénients de chaque jeu de gains.

On voit que l'augmentation du gain  $k_{fb}$  diminue les « overshoots », mais aussi la valeur finale, donc augmente l'erreur...

Le bon compromis semble être le gain  $k_{fb} = 1$ .

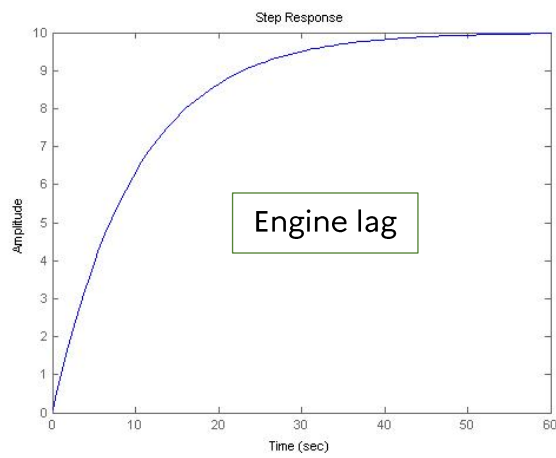
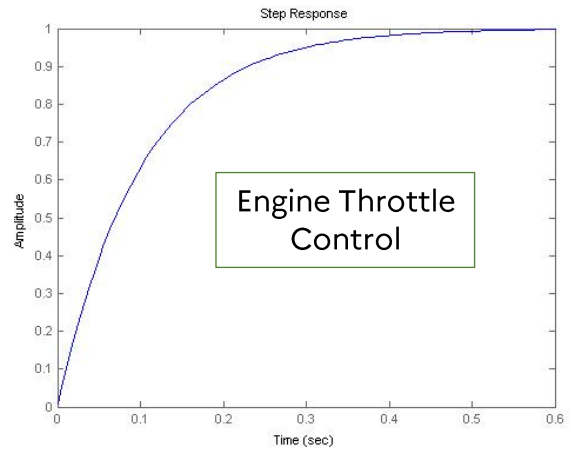
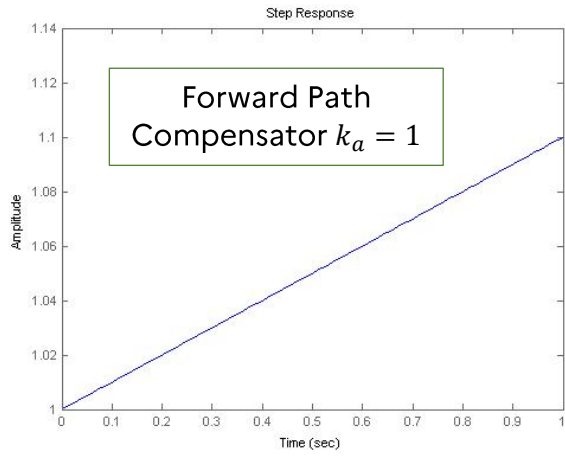
Remarque :

En reprenant la réponse de la question précédente, on voit que pour avoir une erreur nulle il faut que :

$$k_{fb} = 1 - \frac{0,53}{0,38k_a} = 1 - \frac{0,53}{0,38} = -0,39$$

Ce qui se confirme sur les graphes, plus le gain  $k_{fb}$  est faible, plus l'erreur diminue, au détriment d'une « mauvaise » dynamique...

Annexes :



## Exercice 5 : Freinage d'un obus par la neige

Un obus de **diamètre**  $d = 100 \text{ mm}$  et de **masse**  $m = 10 \text{ kg}$  pénètre dans la neige tassée à :

$$T_{\text{neige}} = 0^\circ\text{C}$$

Il s'enfonce de  $l = 5 \text{ m}$  sans éclater selon une trajectoire rectiligne selon l'axe **AB**. Le mouvement de l'obus est **hélicoïdal**; quand il rentre en contact avec la neige au point **A**, sa vitesse de rotation autour de son axe est :

$$\omega_A = 200 \text{ rad/s}$$

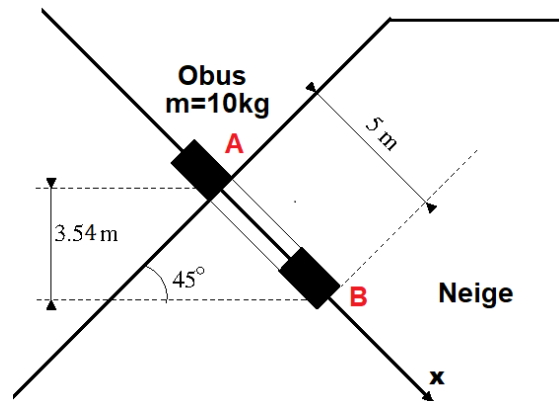
Sa vitesse de translation :

$$v_A = 100 \text{ m/s.}$$

Sa température est :

$$T_{\text{obus}} = 40^\circ\text{C}$$

Le repère défini par  $(AB\vec{x})$ , a pour origine spatiale et temporelle le point **A** ( $x_A = 0 \text{ m}, t_A = 0 \text{ s}$ ).



### Données utiles :

- Pour le calcul du moment d'inertie  $J_\Delta$  on assimilera l'obus à un cylindre plein de 100mm de diamètre :  $J_\Delta = \frac{mD^2}{8}$
- La quantité de chaleur dégagée par un objet chaud en contact avec un milieu froid est  $\Delta Q = mc_p\Delta T$  (avec  $m$ , la masse de l'objet,  $c_p$  sa chaleur spécifique à pression constante (en  $\frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ ) et  $\Delta T$  l'écart de température.
- L'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe  $\Delta$  est :

$$E_{\text{cin}} = J_\Delta \frac{\omega_\Delta^2}{2}$$

Avec  $\omega_\Delta$  sa vitesse angulaire.

- Théorème du moment cinétique (ou de l'accélération angulaire) :

$$\sum M_{\Delta, F_{\text{ext}}} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt}$$

- Théorème de l'énergie cinétique :  $\Delta E_{\text{cinétique}} \Big|_A^B = \sum W_{F_{\text{ext}}} \Big|_A^B + \sum W_{F_{\text{int}}} \Big|_A^B$

On souhaite dans un premier temps calculer la force de frottement longitudinale notée  $\vec{R}$  associée au frottement obus/neige.

**a/** Déterminer  $\gamma$ , l'accélération de l'obus en fonction des forces s'exerçant sur celui-ci: la force de frottement Obus/neige notée  $\vec{R}$  (frottement solide) et le poids noté  $\vec{P}$ . On projettera sur l'axe  $(AB\vec{x})$ .

Appliquons le PFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}(t)$$

$$m\vec{\gamma}(t) = \vec{R} + \vec{P} \cos(\alpha)$$

En projetant sur l'axe ABx,

$$m\gamma(t) = R + mg\cos(\alpha)$$

$$\gamma = \frac{R}{m} + g\cos(\alpha)$$

**b/**Exprimer les équations du mouvement qui en découlent et en déduire une expression de  $\gamma$  en fonction de  $v_A$  et  $t_B$  ( $t_B$  étant le temps que met l'obus pour arriver à son point d'arrêt B).

$$\gamma(t) = \frac{R}{m} + g\cos(\alpha)$$

$$v(t) = v_A + \gamma t$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}$$

avec  $v(t_A) = v(0) = v_0 = v_A$  et  $v(t_B) = v(t_B) = v_A = \gamma t_B$

$x(t_A) = x(0) = x_0 = 0$  et  $x(t_B) = x(t_B) = v_0 t_B + \frac{\gamma t_B^2}{2} = l$

On peut déduire

$$t_B = -\frac{v_A}{\gamma}$$

$$-\frac{v_A^2}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2\gamma} = -\frac{v_A^2}{2\gamma} = l$$

Finalement

$$-\frac{v_A^2}{2l} = \gamma = \frac{-10000}{10} = -10^3 \text{ m/s}^2$$

$$t_B = \frac{-100}{-1000} = 0.1 \text{ s}$$



**c/**Déduire des questions **a/** et **b/** l'expression et la valeur numérique de la force de frottement  $|\vec{R}|$ .

$$\gamma(t) = \frac{R}{m} + g \cos(\alpha)$$

$$R = m\gamma - mg \cos(\alpha) = -10^4 - 10 \times 9,81 \times 0.707 = -10069.35 \text{ N}$$

Nous souhaitons maintenant calculer le couple de frottement noté  $C_f$ .

**d/**Etablir les équations du mouvement autour de l'axe de l'obus, sachant que le seul moment s'appliquant à l'obus est le couple de frottement  $C_f$ .

$$\sum M_{\Delta, F_{ext}} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mD^2}{8} \cdot \frac{d\omega}{dt} = C_f$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{8C_f}{mD^2}$$

**e/**Après intégration des équations du mouvement, déterminer l'expression du couple de frottement  $C_f$ , ainsi que sa valeur numérique (en supposant que la rotation s'arrête en même temps que la translation).

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{8C_f}{mD^2}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{8C_f}{mD^2} t$$

$$\text{Or } \omega(t_A) = \omega(0) = \omega_A = 200 \text{ rad/s}$$

$$\omega(t_B) = 0 = \omega_A + \frac{8C_f}{mD^2} t_b$$

On peut en déduire  $C_f$  :

$$C_f = -\frac{\omega_A m D^2}{4t_b} = -\frac{200 \times 10 \times 0.1 \times 0.1}{8 \times 0.1} = -25 \text{ N.m.rad}$$

Estimation de la masse de neige passant de l'état solide à l'état liquide.

- le travail des forces intérieures correspond à la somme du travail de la force de frottement  $R$  et du travail du couple de frottement  $C_f$ . Il s'agit du **travail de frottement**.
- Le travail des forces extérieures correspond uniquement au travail du poids de l'obus.

**f/**Exprimer la variation de l'énergie cinétique  $\Delta E_{cinétique}|_A^B$  de l'obus en fonction de  $m, J_{\Delta}, v_A$  et  $\omega_A$ . Donner une valeur numérique.

$$\Delta E_{cinétique}|_A^B = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2) + J_{\Delta} \frac{(\omega_B^2 - \omega_A^2)}{2}$$

$$\Delta E_{cinétique}|_A^B = -\frac{1}{2} m v_A^2 - J_{\Delta} \frac{\omega_A^2}{2}$$

$$\Delta E_{cinétique}|_A^B = -\frac{1}{2}10^5 - \frac{4 \times 10^3}{16} = -5 \times 10^4 - 0.25 \times 10^3 = -50250 \text{ J}$$

**g/**Exprimer le travail des forces extérieures  $\sum W_{F_{ext}}|_A^B$  puis calculer la valeur numérique associée.

$$\sum W_{F_{ext}}|_A^B = P \times h = 10 \times 9.81 \times 3,54 = 347,27 \text{ J}$$

**h/**Déduire des questions **f/** et **g/** la valeur numérique de  $\sum W_{F_{int}}|_A^B$  correspondant au travail de frottement.

On utilise le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_{cinétique}|_A^B = \sum W_{F_{ext}}|_A^B + \sum W_{F_{int}}|_A^B = -50250 \text{ J} = 347,27 + \sum W_{F_{int}}|_A^B$$

$$\sum W_{F_{int}}|_A^B = -50250 - 347,27 = -50597,27 \text{ J}$$

On souhaite maintenant estimer la masse de neige qui a fondu suite au contact avec l'obus.

- Le **travail de frottement** est entièrement transformé en chaleur et cédé à la neige! Si l'on souhaite estimer l'énergie totale cédée à la neige, il faut aussi ajouter la chaleur dégagée par l'échange thermique entre l'obus et la neige dû à l'écart de température entre les deux milieux.

**i/**Calculer la quantité de chaleur dégagée  $\Delta Q$  sachant que la chaleur spécifique du matériau constituant l'obus est  $c_p = 0.48 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$ . En déduire l'énergie totale cédée par l'obus à la neige.

$$\Delta Q = mc_p \Delta T = 10 \times 480 \times 40 = 192\,000 \text{ J}$$

L'énergie totale cédée à la neige est :

$$192\,000 \text{ J} + 50597,27 \text{ J} = 242\,597,27 \text{ J}$$

**j/** Sachant que la chaleur massique de fusion de la neige est  $c = 334 \text{ kJ/kg}$ . Estimer la masse de neige qui a fondu suite au contact avec l'obus.

$$m_{neige} = \frac{242\,597,27}{334000} = 0,726 \text{ kg}$$

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

-----

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION "AVION" ET "HELICOPTERE"

-----

SESSION DU 9 OCTOBRE 2023

-----

ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES

---

Durée: 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée --  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur ce document

Document validé par :

Nom : DROBYSZ Dimitri

Date : 25/09/2023

Signature :

Lieutenant-colonel Dimitri Drobysz  
Directeur de l'EPNER





## EXERCICE 1 : PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE APPLIQUE A UN SYSTEME OUVERT

Soit un système constitué d'une entrée et d'une sortie à travers lesquelles s'écoule un fluide. On considère un **volume de contrôle** fixe dans l'espace à travers lequel entre et sort le fluide. Le système comprend tout ce qui est dans le volume de contrôle. Le système échange avec le milieu extérieur :

- Un transfert thermique spécifique (ou massique) noté  $q$  (en J/kg)
- Un travail indiqué spécifique (ou massique) noté  $w_i$  (en J/kg), c'est le travail reçu par le système **autre que celui produit par les forces de pression en entrée et en sortie du système**. Il s'agit du travail des parois mobiles agissant sur le fluide (par exemple celui d'une hélice, ou d'un arbre en rotation, ...)
- Du fluide avec le milieu extérieur

En régime stationnaire (ou permanent), le premier principe de la thermodynamique appliqué au système ouvert peut s'énoncer de la façon suivante:

$$\Delta e_{cin} + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q \quad (1)$$

Où  $h$  est l'enthalpie spécifique (ou massique en J/kg),  $e_{cin}$  est l'énergie cinétique spécifique (ou massique, en J/kg),  $e_p$  est l'énergie potentielle spécifique (ou massique en J/kg).

Ainsi  $\Delta e_{cin}$  correspond à la variation d'énergie cinétique et  $\Delta e_p$  à la variation d'énergie potentiel.

### 1/ GENERALITE SUR LES APPLICATIONS DU PREMIER PRINCIPE EN SYSTEME OUVERT

Soit une tuyère constituée d'un divergent **parfaitement calorifugé**.

**1.1/** Si l'on souhaite appliquer le premier principe à ce système, quels termes sont présents dans l'expression (1) ? Justifier la présence ou non de chacun des termes dans l'expression.

**1.2/** Soient  $T_e$  et  $T_s$  respectivement les températures d'entrée et de sortie du fluide dans la tuyère. si l'on néglige la vitesse d'entrée  $v_e$  du fluide à la l'entrée de la tuyère. Donner une expression pour la vitesse de sortie  $v_s$  du fluide à la sortie de la tuyère.

**1.3/** Si l'on souhaite maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique à un système de type moteur à turbine à gaz (compresseur + chambre de combustion + turbine) dans ce cas on ne considère pas de tuyère. Quels termes sont présents dans l'expression (1), justifier la présence ou non de chacun des termes dans l'expression ?

**Hypothèses à considérer pour toutes les machines thermiques étudiées par la suite**

- L'air est un **gaz thermiquement parfait** :  $\gamma = 1.4$ , et sa capacité thermique massique à pression constante. La variation d'enthalpie d'un gaz thermiquement parfait s'exprime de la façon suivante :  $dh = c_p dT$ , où  $c_p = 1,005 \text{ kJ}/(\text{K} \cdot \text{kg})$  est la chaleur spécifique à pression constante.
- L'écoulement est supposé unidimensionnel et nous sommes en régime **permanent (stationnaire)**.
- Les variations d'énergie potentielles sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétiques sont négligées **sauf dans les tuyères**.
- Les écoulements dans les tuyères sont **isentropiques**.
- Les parties mobiles sont : les compresseurs et les turbines. On ne considère pas d'alternateur.
- On néglige les pertes mécaniques par frottements.
- La puissance mécanique cédée à la turbine est intégralement transmise au compresseur.
- Les évolutions dans la **turbine** et dans le **compresseur** sont **isentropiques**.
- La combustion dans la chambre de combustion est **isobare** et il n'y a pas de perte de charge.
- Les paramètres thermodynamiques ( $\gamma$  et  $c_v$ ) de l'air ne varient pas avec la température de même que le débit massique d'air  $D_m = 50 \text{ kg/s}$ . Bien qu'il y ait combustion, on ne considèrera pas l'évolution de la composition chimique du mélange gazeux.
- Le pouvoir calorifique massique du carburant utilisé (kérosène) est  $p_k = 50 \text{ MJ/kg}$ .
- Loi des gaz parfaits :  $p = \rho r T$
- Pour une transformation **isentropique**, on a  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}$

**2/ TURBOREACTEUR SANS POST-COMBUSTION**

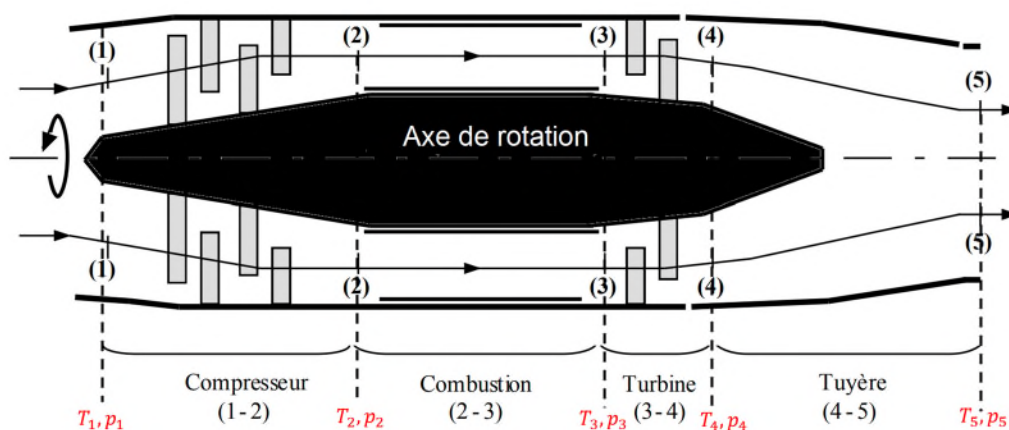


Figure 1 : schéma du turboréacteur 1

On souhaite étudier le modèle de réacteur (Figure 1) équipant un avion de chasse. Les propriétés de l'écoulement sont décrites ci-après :

**(1)→(2)** L'air ambiant ( $T_1 = 298K, p_1 = 1013,25 \text{ hPa}$ ) est aspiré et comprimé par le compresseur. Le taux de compression du compresseur est tel que  $\tau_{1-2} = 10,5$ . L'air pénètre ensuite dans la chambre de combustion (à la température  $T_2$  et à la pression  $p_2$ ) où le carburant est injecté.

**(2)→(3)** La combustion du kérosène, l'air subit un réchauffement isobare ( $p_3 = p_2$ ) jusqu'à la température  $T_3 = 1200 \text{ K}$ .

**(3)→(4)** Le mélange gazeux se détend partiellement dans la turbine.

**(4)→(5)** Les gaz sont admis dans la tuyère à section variable où la détente des gaz se poursuit jusqu'à la pression ambiante  $p_5 = p_1 = 1013,25 \text{ hPa}$ . La tuyère est parfaitement **calorifugée**.

**2.1/** Donner une expression littérale de la température  $T_2$  à la sortie du compresseur. Faire l'application numérique.

**2.2/** Donner une expression littérale du travail indiqué spécifique (ou massique)  $w_{i,12}$  mis en jeu dans le compresseur.

La valeur numérique du travail indiqué spécifique est  $w_{i,12} = 288.7 \text{ kJ/kg}$ .

**2.3/** En exploitant cette donnée, retrouver la valeur de la température  $T_2$ .

**2.4/** Toujours en exploitant cette donnée, calculer la valeur de la température  $T_4$  à la sortie de la turbine.

**2.5/** Donner une expression littérale de la pression  $p_4$  à la sortie de la turbine. Puis faire l'application numérique

**2.6/** Donner une expression littérale de la température  $T_5$  à la sortie de la tuyère. On rappelle que la tuyère est parfaitement **calorifugée**.

On souhaite maintenant évaluer les puissances cinétique et thermique du turboréacteur.

**2.7/** Quelle est la relation simple qui existe entre la puissance cinétique (en  $J/s$ ), le débit massique d'air  $D_m$  (en  $kg/s$ ) et l'énergie cinétique spécifique  $e_c$  ( $J/kg$ ).

**2.8/** La température  $T_5$  à la sortie de la tuyère vaut  $715 \text{ K}$ . Donner une expression de la puissance cinétique  $P_{cin}$  de l'écoulement à la sortie de la tuyère, on néglige la vitesse d'entrée des gaz.

**2.9/** Calculer la vitesse d'éjection des gaz ainsi que la puissance cinétique.

**2.10/** Etablir l'expression littérale puis calculer la puissance thermique  $P_{th}$  reçue par l'air dans la chambre de combustion (2-3).

**2.11/** Si la puissance thermique  $P_{th}$  est de  $40,8 \text{ MW}$ , calculer le débit massique  $D_{kerosene}$  (consommation spécifique de carburant en  $kg/s$ ).

2.12/ Calculer le rendement global du turboréacteur  $\eta_{th}$ . (Rapport puissance cinétique sur puissance reçue par l'air).

### 3/ TURBOREACTEUR AVEC POST-COMBUSTION

On considère maintenant un turboréacteur avec post combustion (Figure 2)

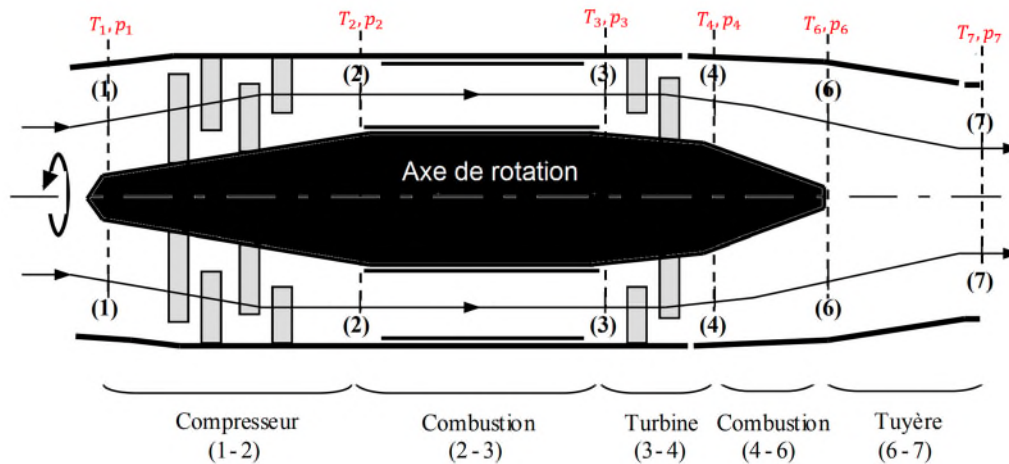


Figure 2 : schéma du turboréacteur 2 (avec postcombustion)

Les températures et pressions des états (1), (2), (3) et (4) obtenues dans la première partie du problème sont inchangées. Nous ajoutons maintenant une seconde combustion entre la turbine et la tuyère.

**(4)→(6)** avant l'entrée dans la tuyère, l'air est chauffé de la température  $T_4$  à la température  $T_6 = 2000 K$  de manière isobare  $p_6 = p_4 = 4.75 \text{ bar}$  via la post combustion.

**(6)→(7)** Les gaz sont admis dans la tuyère à section variable où la détente des gaz se poursuit jusqu'à la température  $T_7$  et la pression ambiante  $p_7 = p_1 = 1013,25 \text{ hPa}$ .

Le débit massique de l'écoulement d'air reste inchangé  $D_m = 50 \text{ kg/s}$ .

3.1/ Connaissant  $T_6$ , montrer que la température  $T_7$  à la sortie de la tuyère est de  $1286 K$ . La tuyère est parfaitement **calorifugée**.

3.2/ Calculer le transfert thermique spécifique (ou massique)  $q_{4-6}$  reçu par l'air lors de la postcombustion.

3.3/ Calculer la puissance cinétique  $P_{cin,B}$  des gaz à la sortie de la tuyère ainsi que la vitesse d'éjection des gaz. On néglige la vitesse à l'entrée de la tuyère.

3.4/ Calculer la puissance thermique totale reçue par l'air dans le turboréacteur **(B)**, en déduire la consommation de kérosène.

3.5/ Calculer le rendement thermique du réacteur  $\eta_{th,(B)}$ .

3.6/ Commenter les valeurs numériques de rendement et de consommation obtenues pour les réacteurs A et B.



**3.7/**En générale, la post combustion ne doit pas être maintenue plus d'une dizaine de minutes, pour quelles raisons ?

### EXERCICE 2 : SONDE DE MESURE A PRESSION DYNAMIQUE

Un aéronef se déplace à une vitesse  $U$  subsonique avec  $M < 0.3$ , il vole au niveau de la mer, il est équipé d'une sonde de mesure de pression dynamique (voir Figure 3).

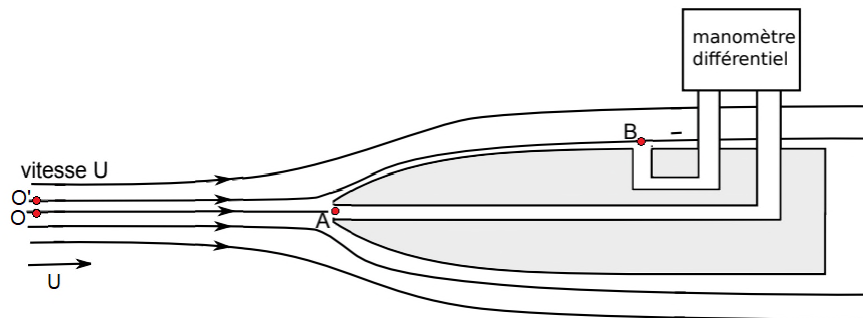


Figure 3: Sonde de mesure à pression dynamique (utilisation d'un manomètre différentiel pour mesurer la différence de pression)

L'objectif de ce dispositif est de mesurer la vitesse  $U$  de l'écoulement amont.

**Hypothèses :**

- Les points O et O' sont infiniment proches ce qui fait que l'on peut dire :

$$p_o = p_{o'} \text{ et } v_o = v_{o'} = U$$

- Il n'y a pas d'écoulement dans la sonde, celle-ci étant bouchée à son extrémité. Ainsi le point A est un point d'arrêt.
- On considère qu'au point B on a :  $v_B = v_{o'}$ .
- La différence de hauteur  $z_B - z_A \approx 0$

**Données :**

Masse volumique de l'air :  $1.2 \text{ kg/m}^3$

Masse volumique de l'eau :  $1000 \text{ kg/m}^3$

1kt=  $1.852 \text{ km/h}$

- 1/** Comment s'appelle le dispositif représenté sur la Figure 1 ?
- 2/** Le nombre de Mach de l'écoulement étant inférieur à 0.3, que peut-on dire de l'écoulement ?
- 3/** En considérant nos hypothèses, exprimer la vitesse  $U$  en fonction des pressions  $p_A, p_B$  et de la masse volumique de l'air  $\rho_{air}$ . (utilisez les lignes de courant OA et O'B)
- 4/** Quelle serait la différence de pression pour un aéronef volant à 160 kt ?

On remplace maintenant le manomètre différentiel par un tube en U contenant un liquide incompressible, à savoir de l'eau. En régime stationnaire, le liquide est immobile. Introduisons les points A' et B' (Figure 4).

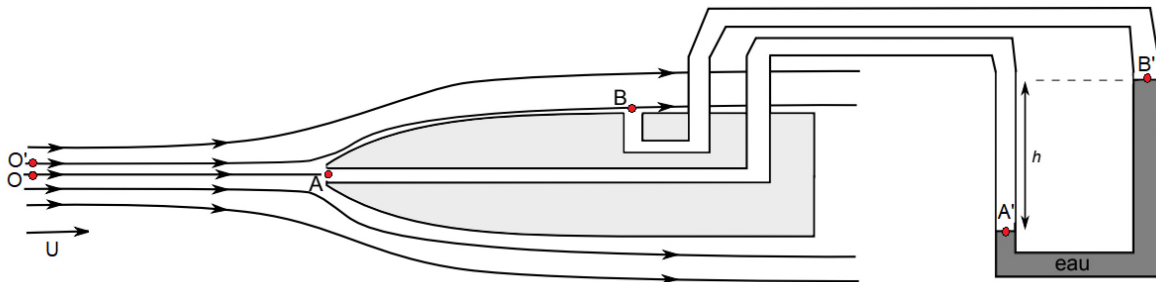


Figure 4: Sonde à mesure de pression dynamique (utilisation d'un tube en U contenant un liquide incompressible en remplacement du manomètre différentiel).

L'air est immobile entre le point B et le point B', il est immobile entre les points A et A'. La colonne de liquide l'est également.

**5/** Utilisez la relation de la statique des fluides pour donner :

- Une expression de la différence de pression  $p_B - p_{B'}$
- Une expression de la différence de pression  $p_A - p_{A'}$
- Une expression de la différence de pression  $p_{A'} - p_{B'}$

**6/** En déduire une expression de la différence de pression :  $p_A - p_B$ . Quels termes peut-on négliger dans cette expression et pourquoi ?

**7/**Quelle différence de hauteur pour une vitesse de 160 kt ?

**8/**On mesure maintenant une différence de hauteur de  $z_{B'} - z_{A'}$  de 5 cm, quelle est la vitesse de l'aéronef ?

### EXERCICE 3 : SIMILITUDE

En physique, il est d'usage d'"adimensionner" les équations afin de faire apparaître des paramètres de similitude et de s'affranchir des unités d'un système.

**1/** Quel est l'intérêt des paramètres de similitude ?

Soit l'équation de Navier Stokes régissant les écoulements incompressibles instationnaires pour un fluide visqueux. Dans le cas unidimensionnel et en négligeant les effets de la gravité, elle s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Avec  $u$  la vitesse en (m/s),  $\rho$  la masse volumique (en kg/m<sup>3</sup>),  $p$  la pression du fluide (en pa),  $\nu$  la viscosité cinématique (en m<sup>2</sup>/s).

La viscosité cinématique s'exprime en fonction de la viscosité dynamique :  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$

Soient les paramètres sans dimension suivants :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{U_0 t}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 U_0^2}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Avec :

$L$  une longueur caractéristique **constante** (par exemple la corde d'une aile d'avion)

$U_0$  la vitesse de l'écoulement à l'infini amont (vitesse constante).

$\rho_0$  la masse volumique de l'écoulement à l'infini amont (dans le cas incompressible,  $\rho_0 = \rho$ )

**2/** Montrer que l'équation de Navier Stokes adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{N} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

Avec  $N$ , à déterminer.

**3/** A quel nombre sans dimension correspond  $N$  ? quelle est sa signification physique ?

Soit un aéronef se déplaçant à la vitesse  $v_0$ , à la pression atmosphérique  $p_0$ . On réalise une maquette à l'échelle 1/20. On souhaite effectuer des essais dans une soufflerie à air à la même vitesse que l'aéronef à l'échelle 1/1.

**4/** A quelle pression doit fonctionner la soufflerie si on suppose que la température et la viscosité de l'air reste constante.

Données :

-L'air est régi par la loi des gaz parfaits :  $p = \rho r T$

-Si  $x' = a x$  alors  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dx'}{dx} \times \frac{\partial}{\partial x'} = a \frac{\partial}{\partial x'}$

-Dans le cas incompressible :  $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} = 1$

## EXERCICE 4 : SYSTEME DE TENUE D'INCLINAISON

Afin de concevoir un système de tenue d'inclinaison choisie par le pilote, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$I_x \dot{p} = L_p p + L_{D\delta l} \Delta D \delta l$$

Où l'on a écrit :

- $I_x$  l'inertie de l'aéronef autour de l'axe de roulis

- $p$  la vitesse de rotation de l'aéronef autour de l'axe de roulis

- $\Delta D \delta l$  la variation de position du manche en latéral par rapport à une position d'équilibre initiale pour laquelle on a  $p = 0 \text{ rad.s}^{-1}$

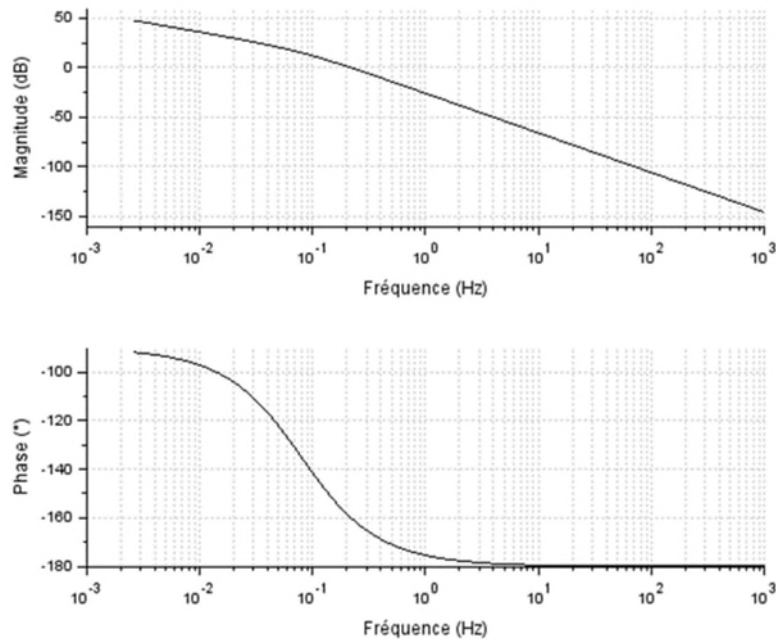
- $L_p$  et  $L_{D\delta l}$  des coefficients dépendant des conditions de vol à l'équilibre initial et des caractéristiques de l'aéronef

- 1- Décrire l'équation physiquement et expliquer chacun de ses termes.
- 2- Donner l'expression de la fonction de transfert  $\frac{P}{\Delta D \delta l}$  en Laplace. Et donner la condition de stabilité de l'aéronef. (On notera la variable de Laplace  $s$ )
- 3- Sachant que la variation d'inclinaison par rapport à la valeur à l'équilibre initial  $\Delta\phi$  est directement reliée à la vitesse de roulis par la relation :  $\frac{d\Delta\phi}{dt} = p$ , donner l'expression de la fonction de transfert  $\frac{\Delta\phi}{\Delta D \delta l}$ . L'aéronef est-il stable ?
- 4- Dessiner le schéma bloc d'un système de tenue d'inclinaison.  
Pour cela, on part du principe que l'avion a une certaine inclinaison  $\phi$  au départ. Le pilote demande alors une variation d'inclinaison consigne  $\Delta\phi_c$ . Le système agit directement sur la position du manche  $\Delta D \delta l$  et capture la variation d'inclinaison de l'avion  $\Delta\phi$  générée. L'ordre au manche  $\Delta D \delta l$  varie en fonction de l'écart  $\Delta\phi_c - \Delta\phi$ .  
On supposera le capteur de mesure de la variation d'inclinaison parfait.  
Note : on écrira le gain du correcteur proportionnel  $K$ .
- 5- Donner le signe du gain  $K$ .
- 6- Montrer que l'on a la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_c} = \frac{KL_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l}}$$

- 7- Après avoir donné le signe du coefficient  $L_{D\delta l}$ , dire si le système est stable.  
Bonus : donner la condition sur le gain  $K$  pour qu'il apparaisse des oscillations dans la réponse de l'avion.

On a tracé le diagramme de Bode de notre avion naturel :

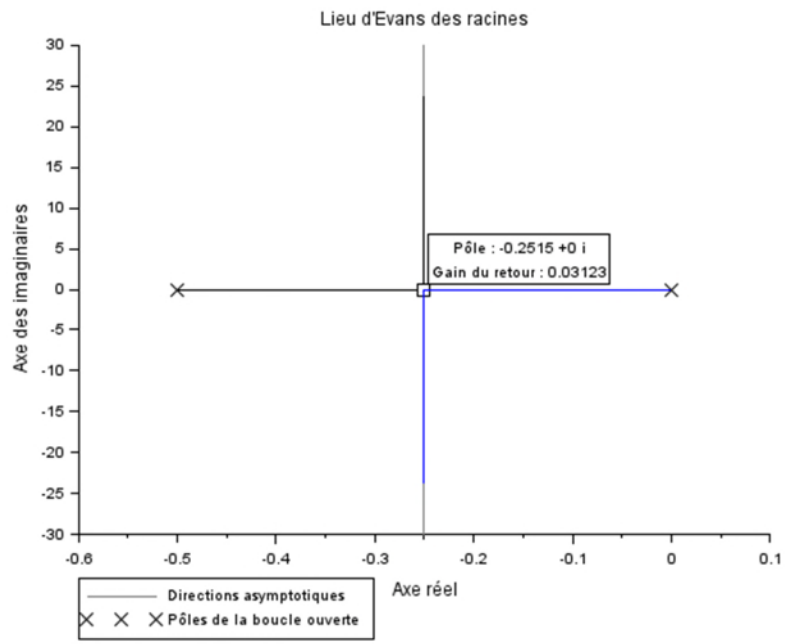


- 8- Donner les marges de gain et de phase. Est-ce surprenant ?
- 9- Pour une consigne du pilote de type échelon d'amplitude  $\varphi_{c0}$ , donner l'erreur sur la variation d'inclinaison de l'avion réellement obtenue.
- 10- Est-ce un résultat étonnant ? Pour plus de représentativité, qu'aurait-on dû modifier dans notre schéma bloc ?

Question bonus

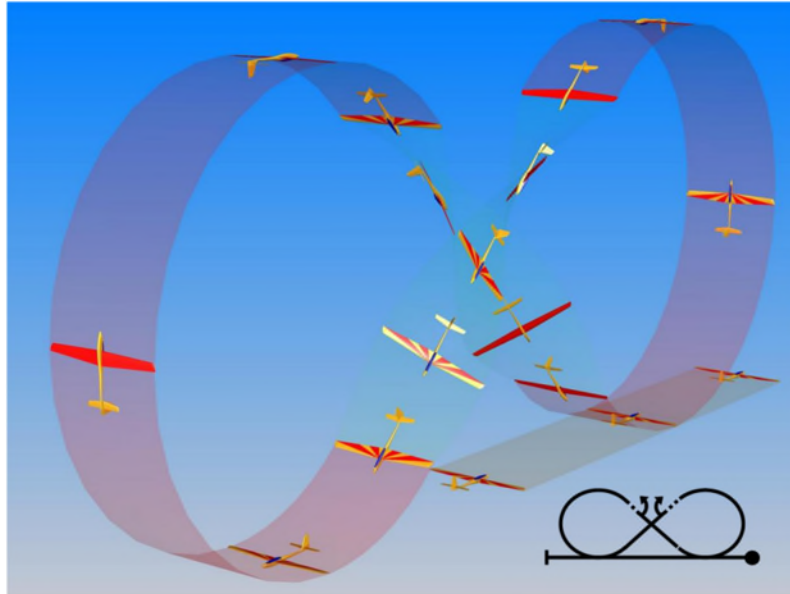
On donne  $I_x = 2\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $L_{D\delta l} = 4\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-2}$  et  $L_p = -1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .  
(Valeurs données à titre indicatif)

- 11- Décrivez le graphique suivant :



## EXERCICE 5 : HUIT CUBAIN

On s'intéresse au mouvement d'un avion (assimilé à un point matériel  $G$  de masse  $m$ ) pendant une manœuvre de type "huit cubain" :



On définit deux repères :

- terrestre (supposé Galiléen)  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  avec  $O$  un point fixe de la Terre,  $\vec{x}_0$  pointé dans le sens d'avancement initial de l'avion,  $\vec{y}_0$  pointé vers la droite et  $\vec{z}_0$  vers le bas
- avion  $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  avec  $G$  le centre de gravité de l'avion,  $\vec{x}$  pointé vers le nez de l'avion,  $\vec{y}$  pointé vers la droite et  $\vec{z}$  vers le bas

La trajectoire de l'avion est contenue dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ .

On notera l'inertie de l'avion autour de ses différents axes respectivement  $I_x, I_y, I_z$ .

On notera :

- la poussée  $\vec{T}$
- la portance  $\vec{F}_z$
- la traînée  $\vec{F}_x$

On suppose que l'angle de calage des moteurs est nul de sorte que  $\vec{T} = T\vec{x}$ .

A. Première phase : palier à vitesse constante

1- Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à l'avion.

On définit l'assiette comme étant l'angle de rotation autour de l'axe  $\vec{y} = \vec{y}_0$  entre les deux repères terrestre et avion.

On écrira le coefficient de portance de l'aile  $C_z(\alpha) = C_{z\alpha}\alpha$ , et le coefficient de traînée  $C_x(\alpha) = C_{x0} + kC_z^2$ .

- 2- Donner l'expression du calage des ailes  $\gamma_{cal}$  pour que l'assiette soit nulle dans les conditions de vol données.

Données :

$$\begin{aligned}m &= 750 \text{ kg} \\ \rho &= 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ S &= 10,85 \text{ m}^2 \\ V &= 200 \text{ km/h} \\ C_{z\alpha} &= 5,7 \text{ rad}^{-1} \\ C_{x0} &= 0,006 \\ k &= 0,05 \\ SC_{x \text{ fus+trains}} &= 1,5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

- 3- Donner la poussée des moteurs, en supposant que le calage des ailes est celui qui permet d'avoir une assiette nulle.

B. Deuxième phase : la boucle

On supposera que l'avion décrit un cercle parfait de rayon  $R$ , et que le vecteur vitesse est toujours porté par l'axe  $\vec{x}$ .

- 4- Ecrire les deux relations données par le PFD projeté suivant les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .
- 5- Montrer que la norme de l'accélération centripète d'un point matériel décrivant un cercle de rayon  $R$  à vitesse de rotation constante  $\omega$  s'écrit  $R\omega^2$ .
- 6- Ecrire les relations en supposant que la vitesse de l'avion est constante.
- 7- Quelle incohérence voit-on apparaître ? Commentaires ?



On introduit le repère air comme suit :  $(G, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$  avec  $\vec{x}_a$  qui porte le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et  $\vec{z}_a$  vers le bas et contenu dans le plan de symétrie de l'avion.

8- Donner la relation entre assiette, incidence, pente (angle entre les vecteurs  $\vec{x}_a$  et  $\vec{x}_0$ ) et calage des ailes.

9- Ecrire les deux relations du PFD dans le repère air.

On suppose que :

-l'angle  $\alpha - \gamma_{cal}$  reste très petit

-la vitesse est toujours constante pendant la boucle, de valeur connue

-on connaît l'altitude ( $\rho$ )

-la projection de la poussée et la traînée suivant l'axe  $\vec{z}_a$  est négligeable devant celle de la portance

10- Déterminer les inconnues du problème ( $\gamma, \alpha, T, \theta$ ).

C. Troisième phase : le retourné

On peut de nouveau supposer que le vecteur vitesse est porté par l'axe  $\vec{x}$ .

11- Quelle équation supplémentaire est à prendre en compte pour décrire le mouvement de l'avion pendant cette phase ? Ecrire cette relation de manière générale.

12- Expliquer de manière générale quels phénomènes sont à prendre en compte dans cette relation pour décrire le mouvement de rotation de l'avion.

Essais en Vol Istres  
EPNER

---

Titre/Grade:

Nom:

Prénom:

Examen:

---

EXAMEN PROBATOIRE D'ADMISSION

AU STAGE ESSAIS DE CLASSE A

-----

PILOTE D'ESSAIS EXPERIMENTAUX, INGENIEUR NAVIGANT D'ESSAIS  
OPTION « AVION » ET « HELICOPTERE »

-----

SESSION DU 9 OCTOBRE 2023

-----

**CORRIGÉ ÉPREUVE ÉCRITE DE CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES**

---

Durée: 3h00 – Seule une calculatrice non programmable et non graphique est autorisée --  
– Aucun document n'est autorisé pour cette épreuve – Ne rien écrire sur ce document

Document validé par :

Nom :

Date :

Signature :

## EXERCICE 1 : PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE APPLIQUE A UN SYSTEME OUVERT

Soit un système constitué d'une entrée et d'une sortie à travers lesquelles s'écoule un fluide. On considère un **volume de contrôle** fixe dans l'espace à travers lequel entre et sort le fluide. Le système comprend tout ce qui est dans le volume de contrôle. Le système échange avec le milieu extérieur :

- Un transfert thermique spécifique (ou massique) noté  $q$  (en J/kg)
- Un travail indiqué spécifique (ou massique) noté  $w_i$  (en J/kg), c'est le travail reçu par le système **autre que celui produit par les forces de pression en entrée et en sortie du système**. Il s'agit du travail des parois mobiles agissant sur le fluide (par exemple celui d'une hélice, ou d'un arbre en rotation, ...)
- Du fluide avec le milieu extérieur

En régime stationnaire (ou permanent), le premier principe de la thermodynamique appliqué au système ouvert peut s'énoncer de la façon suivante:

$$\Delta e_{cin} + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q \quad (1)$$

Où  $h$  est l'enthalpie spécifique (ou massique en J/kg),  $e_{cin}$  est l'énergie cinétique spécifique (ou massique, en J/kg),  $e_p$  est l'énergie potentielle spécifique (ou massique en J/kg).

Ainsi  $\Delta e_{cin}$  correspond à la variation d'énergie cinétique et  $\Delta e_p$  à la variation d'énergie potentiel.

### 1/ GENERALITE SUR LES APPLICATIONS DU PREMIER PRINCIPE EN SYSTEME OUVERT

Soit une tuyère constituée d'un divergent **parfaitement calorifugé**.

**1.1/** Si l'on souhaite appliquer le premier principe à ce système, quels termes sont présents dans l'expression (1) ? Justifier la présence ou non de chacun des termes dans l'expression.

- Il n'y a ni paroi mobile ni arbre en rotation, ainsi le terme de travail  $w_i$  est nul.
- La tuyère est parfaitement calorifugée, le terme de transfert thermique  $q$  est par conséquent nul.
- La variation d'énergie potentielle est liée à la variation d'altitude, qui dans le cas d'une tuyère peut être considérée comme nulle.

Ainsi, il reste le terme de variation d'enthalpie spécifique lié à la variation de température qui est non nulle dans une tuyère ainsi que le terme de variation d'énergie cinétique liée à la variation de vitesse qui est en générale importante dans une tuyère efficace. Le premier principe de la thermodynamique en système ouvert s'écrit alors :

$$\Delta e_{cin} + \Delta h = 0$$

**1.2/** Soient  $T_e$  et  $T_s$  respectivement les températures d'entrée et de sortie du fluide dans la tuyère. si l'on néglige la vitesse d'entrée  $v_e$  du fluide à la l'entrée de la tuyère. Donner une expression pour la vitesse de sortie  $v_s$  du fluide à la sortie de la tuyère.

Reprenons le premier principe associé à la tuyère :

$$\Delta e_{cin} + \Delta h = 0$$

$$\frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + c_p(T_s - T_e) = 0$$

$$\frac{v_s^2}{2} + c_p(T_s - T_e) = 0$$

$$v_s = \sqrt{2c_p(T_e - T_s)}$$

**1.3/** Si l'on souhaite maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique à un système de type moteur à turbine à gaz (compresseur + chambre de combustion + turbine) dans ce cas on ne considère pas de tuyère. Quels termes sont présents dans l'expression (1), justifier la présence ou non de chacun des termes dans l'expression ?

- Les transformations dans le compresseur et la turbine sont isentropiques mais pas dans la chambre de combustion où  $q$  est non nul.
- Il y a des parois mobiles ou en rotation dans la turbine et le compresseur ainsi, il existe un travail  $w_i$  non nul.
- La variation d'enthalpie est reliée à la variation de température qui est non nulle dans le cas d'un moteur à turbine à gaz
- La variation d'énergie cinétique est négligée car la variation de vitesse des gaz est faible.
- La variation d'énergie potentielle est reliée à une variation d'altitude, elle est là encore clairement négligeable en regard des dimensions du système.

Finalement, le premier principe de la thermodynamique en système ouvert pour un moteur à turbine à gaz (sans considérer la tuyère) s'écrit :

$$\Delta h = w_i + q$$

<b>ETUDE DE TURBOREACTEURS</b>
--------------------------------

**Hypothèses à considérer pour toutes les machines thermiques étudiées par la suite**

- L'air est un **gaz thermiquement parfait** :  $\gamma = 1.4$ , et sa capacité thermique massique à pression constante. La variation d'enthalpie d'un gaz thermiquement parfait s'exprime de la façon suivante :  $dh = c_p dT$ , où  $c_p = 1,005 \text{ kJ}/(\text{K} \cdot \text{kg})$  est la chaleur spécifique à pression constante.
- L'écoulement est supposé unidimensionnel et nous sommes en régime **permanent (stationnaire)**.
- Les variations d'énergie potentielles sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétiques sont négligées **sauf dans les tuyères**.
- Les écoulements dans les tuyères sont **isentropiques**.
- Les parties mobiles sont : les compresseurs et les turbines. On ne considère pas d'alternateur.
- On néglige les pertes mécaniques par frottements.
- La puissance mécanique cédée à la turbine est intégralement transmise au compresseur.
- Les évolutions dans la **turbine** et dans le **compresseur** sont **isentropiques**.

- La combustion dans la chambre de combustion est **isobare** et il n'y a pas de perte de charge.
- Les paramètres thermodynamiques ( $\gamma$  et  $c_v$ ) de l'air ne varient pas avec la température de même que le débit massique d'air  $D_m = 50 \text{ kg/s}$ . Bien qu'il y ait combustion, on ne considérera pas l'évolution de la composition chimique du mélange gazeux.
- Le pouvoir calorifique massique du carburant utilisé (kérosène) est  $p_k = 50 \text{ MJ/kg}$ .
- Loi des gaz parfaits :  $p = \rho r T$
- Pour une transformation **isentropique**, on a  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}$

## 2/ TURBOREACTEUR SANS POST COMBUSTION

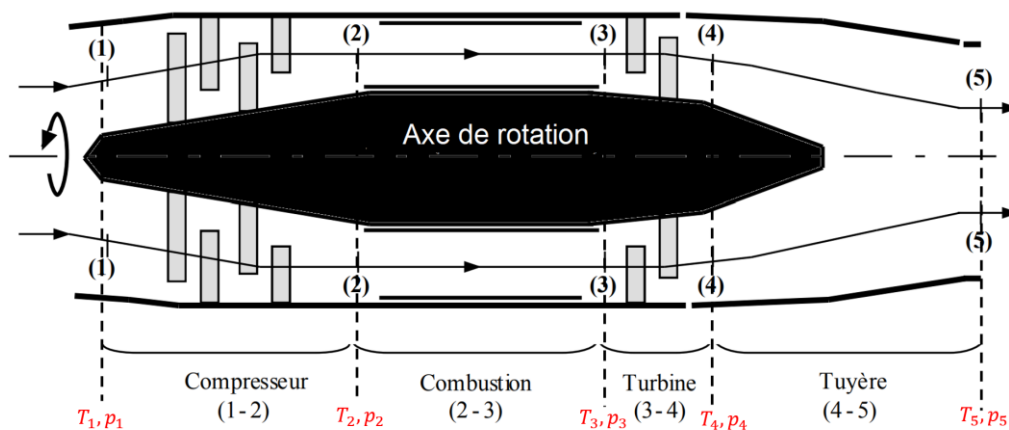


Figure 1 : schéma du turboréacteur 1

On souhaite étudier le modèle de réacteur (cf Figure 1) équipant un avion de chasse. Les propriétés de l'écoulement sont décrites ci-après:

**(1)→(2)** L'air ambiant ( $T_1 = 298K, p_1 = 1013,25 \text{ hPa}$ ) est aspiré et comprimé par le compresseur. Le taux de compression du compresseur est tel que  $\tau_{1-2} = 10,5$ . L'air pénètre ensuite dans la chambre de combustion (à la température  $T_2$  et à la pression  $p_2$ ) où le carburant est injecté.

**(2)→(3)** La combustion du kérosène, l'air subit un réchauffement isobare ( $p_3 = p_2$ ) jusqu'à la température  $T_3 = 1200 \text{ K}$ .

**(3)→(4)** Le mélange gazeux se détend partiellement dans la turbine.

**(4)→(5)** Les gaz sont admis dans la tuyère à section variable où la détente des gaz se poursuit jusqu'à la pression ambiante  $p_5 = p_1 = 1013,25 \text{ hPa}$ . La tuyère est parfaitement **calorifugée**.

**2.1/** Donner une expression littérale de la température  $T_2$  à la sortie du compresseur. Faire l'application numérique.

*La compression est isentropique, on a donc  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$ , en utilisant la loi des gaz parfaits  $\rho = \frac{p}{rT}$ .*

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const} \rightarrow \frac{T_1^\gamma}{p_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{p_2^{\gamma-1}} \rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 (\tau_{12})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_2 = 298 \times 10,5^{0,286} = 587,3 \text{ K}$$

**2.1/** Donner une expression littérale de la température  $T_2$  à la sortie du compresseur. Faire l'application numérique.

Le premier principe en système ouvert appliqué au compresseur s'écrit sachant que la variation d'énergie cinétique et la variation d'énergie potentiel sont négligés. D'autres parts la transformation est isentropique donc  $q = 0$ . Il reste :

$$\Delta h = w_{i,12}$$

$$c_p(T_2 - T_1) = w_{i,12}$$

La valeur numérique du travail indiqué spécifique est  $w_{i,12} = 288,7 \text{ kJ/kg}$ .

**2.3/** En exploitant cette donnée, retrouver la valeur de la température  $T_2$ .

$$c_p(T_2 - T_1) = w_{i,12} = 288,7 \text{ kJ/kg}$$

$$T_2 = 587,3 \text{ K}$$

**2.4/** Toujours en exploitant cette donnée, calculer la valeur de la température  $T_4$  à la sortie de la turbine.

On sait que la totalité de la puissance mécanique cédée à la turbine est intégralement transmise au compresseur ainsi :

$$P_{m,12} + P_{m,34} = 0$$

$$D_m w_{12} + D_m w_{34} = 0$$

$$w_{34} = c_p(T_4 - T_3) = -w_{12} \rightarrow T_4 = -\frac{w_{12}}{c_p} + T_3$$

$$T_4 = 912,7 \text{ K}$$

**2.5/** Donner une expression littérale de la pression  $p_4$  à la sortie de la turbine. Puis faire l'application numérique

La détente partielle dans la turbine est isentropique, on a donc :

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{const} \rightarrow \frac{T_4}{p_4^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_3}{p_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \rightarrow p_4 = p_3 \left( \frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_4 = 4,07 \text{ bar}$$

**2.6/** Donner une expression littérale de la température  $T_5$  à la sortie de la tuyère. On rappelle que la tuyère est parfaitement **calorifugée**.

La tuyère étant parfaitement calorifugée, la détente est isentropique.

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{const} \rightarrow T_5 = T_4 \left( \frac{p_5}{p_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_5 = T_4 \left( \frac{p_5}{p_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 912 \times (0.248)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 612 \text{ K}$$

On souhaite maintenant évaluer les puissances cinétique et thermique du turboréacteur.

**2.7/** Quelle est la relation simple qui existe entre la puissance cinétique (en J/s), le débit massique d'air  $D_m$  (en kg/s) et l'énergie cinétique spécifique  $e_c$  (J/kg).

$$P_{cin} = D_m \times e_c$$

**2.8/** La température  $T_5$  à la sortie de la tuyère vaut 715 K. Donner une expression de la puissance cinétique  $P_{cin}$  de l'écoulement à la sortie de la tuyère, on néglige la vitesse d'entrée des gaz.

Soit  $v_s$  la vitesse d'éjection des gaz à la sortie de la tuyère :

$$P_{cin} = D_m \times e_c = D_m \times \frac{v_s^2}{2}$$

**2.9/** Calculer la vitesse d'éjection des gaz ainsi que la puissance cinétique.

Le premier principe en système ouvert appliqué à la tuyère s'écrit :

$$\Delta e_{cin} + \Delta h_{45} = 0$$

$$\frac{v_s^2}{2} + c_p(T_5 - T_4) = 0 \rightarrow v_s = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 777.4 \text{ m/s}$$

On en déduit la puissance cinétique du turboréacteur

$$P_{cin} = D_m \times e_c = 50 \times \frac{v_s^2}{2} = 15.1 \text{ MW}$$

**2.10/** Etablir l'expression littérale puis calculer la puissance thermique  $P_{th}$  reçue par l'air dans la chambre de combustion (2-3).

$$P_{th} = D_m c_p (T_3 - T_2)$$

$$P_{th} = 50 \times 1005 \times (1200 - 587.3) = 30.6 \text{ MW}$$

**2.11/** Si la puissance thermique  $P_{th}$  est de 40.8 MW, calculer le débit massique  $D_{kerosene}$  (consommation spécifique de carburant en kg/s).

On sait que le pouvoir calorifique massique du kérosène est  $P_k = 5 \text{ MJ/kg}$ . Alors, connaissant la puissance thermique, on peut en déduire la consommation spécifique de carburant :

$$D_{kerosene} = \frac{P_{th}}{P_k} = \frac{40.8}{50} = 0.816 \text{ kg/s}$$

**2.12/** Calculer le rendement global du turboréacteur  $\eta_{th}$ . (Rapport puissance cinétique sur puissance reçue par l'air). (en l'absence de résultat à la question 2.10, on utilisera  $P_{th}=40.8 \text{ MW}$ )

$$\eta_{th} = \frac{P_{cin}}{P_{th}} = \frac{15.1}{30.6} = 0.49, \quad \text{ou} \quad \eta_{th} = \frac{P_{cin}}{P_{th}} = \frac{15.1}{40.8} = 0.3$$

## 2/ TURBOREACTEUR AVEC POST-COMBUSTION

On considère maintenant un turboréacteur avec post combustion (cf Figure 2)

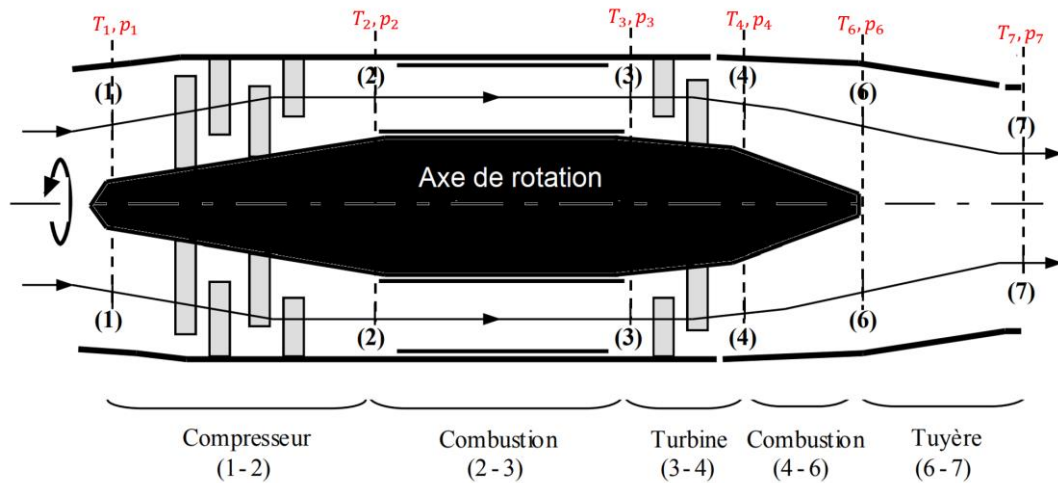


Figure 2 : schéma du turboréacteur 2 (avec postcombustion)

Les températures et pressions des états (1), (2), (3) et (4) obtenues dans la première partie du problème sont inchangées. Nous ajoutons maintenant une seconde combustion entre la turbine et la tuyère.

**(4)→(6)** avant l'entrée dans la tuyère, l'air est chauffé de la température  $T_4$  à la température  $T_6 = 2000 \text{ K}$  de manière isobare  $p_6 = p_4 = 4.75 \text{ bar}$  via la post combustion.

**(6)→(7)** Les gaz sont admis dans la tuyère à section variable où la détente des gaz se poursuit jusqu'à la température  $T_7$  et la pression ambiante  $p_7 = p_1 = 1013,25 \text{ hPa}$ .

Le débit massique de l'écoulement d'air reste inchangé  $D_m = 50 \text{ kg/s}$ .

**3.1/** Connaissant  $T_6$ , montrer que la température  $T_7$  à la sortie de la tuyère est de  $1286 \text{ K}$ . La tuyère est parfaitement **calorifugée**.

La détente des gaz dans la tuyère est isentropique, on peut écrire :

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{const} \rightarrow T_7 = T_6 \left( \frac{p_7}{p_6} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1286 \text{ K}$$

**3.2/** Calculer le transfert thermique spécifique (ou massique)  $q_{4-6}$  reçu par l'air lors de la postcombustion.

Le premier principe en système ouvert appliqué à la combustion isobare (4)-(6) s'écrit:

$$\Delta h = q_{4-6} = c_p(T_6 - T_4) = 1005 \times (2000 - 912) = 1.09 \text{ MJ/kg}$$

**3.3/** Calculer la puissance cinétique  $P_{cin,B}$  des gaz à la sortie de la tuyère ainsi que la vitesse d'éjection des gaz. On néglige la vitesse à l'entrée de la tuyère.

$$P_{cin} = D_m \times e_c$$

Or le premier principe dans la tuyère s'écrit :  $\Delta h_{6-7} + \Delta e_{6-7} = 0$



$$c_p(T_7 - T_6) + \frac{1}{2}v_7^2 = 0$$

$$P_{cin,(B)} = D_m \times e_c = D_m \times c_p(T_6 - T_7) = 35.9 \text{ MW}$$

Vitesse d'éjection des gaz :

$$\frac{1}{2}v_7^2 = c_p(T_6 - T_7) \rightarrow v_7 = \sqrt{2c_p(T_6 - T_7)} = 1197 \text{ m/s}$$

**3.4/** Calculer la puissance thermique totale reçue par l'air dans le turboréacteur (**B**), en déduire la consommation de kérosène. (en l'absence de résultat à la question 2.10, on utilisera  $P_{th}=40.8 \text{ MW}$ )

$$P_{th,(B)} = P_{th,(A)} + D_m \times q_{4-6} = 30.6 \text{ MW} + 54.5 \text{ MW} = 84.3 \text{ MW}$$

ou

$$P_{th,(B)} = P_{th,(A)} + D_m \times q_{4-6} = 40.8 \text{ MW} + 54.5 \text{ MW} = 95.3 \text{ MW}$$

La consommation de carburant est donnée par :

$$D_{kerosene} = \frac{P_{th,(B)}}{P_k} = \frac{84.5 \times 10^6}{50 \times 10^6} = 1.69 \text{ kg/s}$$

ou

$$D_{kerosene} = \frac{P_{th,(B)}}{P_k} = \frac{95.3 \times 10^6}{50 \times 10^6} = 1.906 \text{ kg/s}$$

**3.5/** Calculer le rendement thermique du réacteur  $\eta_{th,(B)}$ .

$$\eta_{th,(B)} = \frac{P_{cin,(B)}}{P_{th,(B)}} = \frac{35.9}{84.3} = 0.42$$

**3.6/** Commenter les valeurs numériques de rendement et de consommation obtenues pour les réacteurs A et B.

Avec la post combustion, on a deux fois plus de puissance motrice mais on consomme beaucoup plus de carburant, ce qui fait qu'au final le rendement est légèrement moins bon.

**3.7/** En générale, la post combustion ne doit pas être maintenue plus d'une dizaine de minutes, pour quelles raisons ?

La consommation de carburant est très élevée, de plus les températures et les vitesses d'éjection sont bien plus élevées, ce qui implique des contraintes mécaniques beaucoup plus importantes quand la post combustion est présente donc une fatigue plus importante du matériel.

## EXERCICE 2 : Sonde de mesure à pression dynamique/ correction

Un aéronef se déplace à une vitesse  $U$  subsonique avec  $M < 0.3$ , il est équipé d'une sonde de mesure de pression dynamique (voir Figure 3).

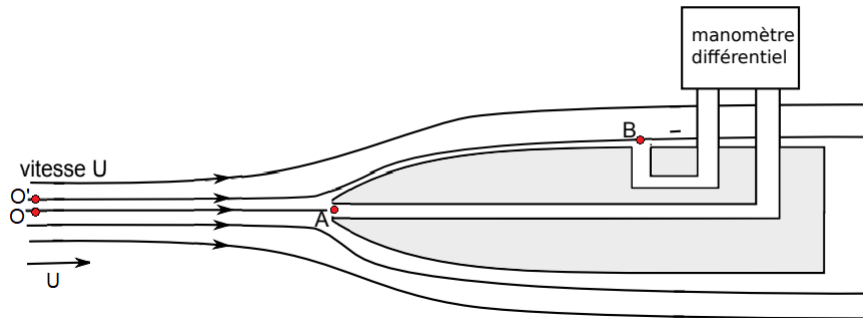


Figure 3: Sonde de mesure à pression dynamique (utilisation d'un manomètre différentiel pour mesurer la différence de pression)

L'objectif de ce dispositif est de mesurer la vitesse  $U$  de l'écoulement amont.

### Hypothèses :

- Les points O et O' sont infiniment proches ce qui fait que l'on peut dire :

$$p_o = p_{o'} \text{ et } v_o = v_{o'} = U$$

- Il n'y a pas d'écoulement dans la sonde, celle-ci étant bouchée à son extrémité. Ainsi le point A est un point d'arrêt.
- On considère qu'au point B on a :  $v_B = v_{o'}$ .
- La différence de hauteur  $z_B - z_{O'} \approx 0$
- L'écoulement est stationnaire

### Données :

Masse volumique de l'air :  $1.2 \text{ kg/m}^3$

Masse volumique de l'eau :  $1000 \text{ kg/m}^3$

$1 \text{ kt} = 1.852 \text{ km/h}$

1/ Comment s'appelle le dispositif représenté sur la Figure 1 ?

C'est une sonde PITOT

2/ Le nombre de Mach de l'écoulement est inférieur à 0.3, que peut-on dire de l'écoulement dans ce cas ?

Si le nombre de Mach est inférieure à 0.3 alors l'écoulement est incompressible.

3/ En considérant nos hypothèses, exprimer la vitesse  $U$  en fonction des pressions  $p_A$ ,  $p_B$  et de la masse volumique de l'air  $\rho_{air}$ . (utilisez les lignes de courant OA et O'B)

L'écoulement est stationnaire et incompressible, dans ce cas la relation de Bernoulli s'écrit :

Le long de la ligne de courant OA :

$$p_o + \frac{\rho v_o^2}{2} + \rho g z_o = p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A$$

A est un point d'arrêt, donc par définition  $v_A = 0$ . De plus  $z_o = z_A$ , ainsi, il reste :

$$p_A = p_o + \frac{\rho v_o^2}{2} = p_o + \frac{\rho U^2}{2}$$

Le long de la ligne de courant  $O'B$  :

$$p_{o'} + \frac{\rho v_{o'}^2}{2} + \rho g z_{o'} = p_B + \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

D'après nos hypothèses on a  $z_B - z_{o'} \approx 0$ , il reste :

$$p_{o'} + \frac{\rho v_{o'}^2}{2} = p_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

On sait que  $p_o = p_{o'}$  et  $v_o = v_{o'} = U$ , finalement :

$$p_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = p_o + \frac{\rho v_o^2}{2} = p_A$$

De plus  $v_B \approx U$ , ainsi :

$$p_B + \frac{\rho U^2}{2} = p_A \rightarrow U = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}$$

4/ Quelle serait la différence de pression pour un avion volant à 160 kt ?

Dans le cas d'un avion se déplaçant à 160 kt :

$$160 \text{ kt} = 296.3 \text{ km/h} = 82.3 \text{ m/s} = U = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho_{\text{air}}}}$$

$$(p_A - p_B) = \frac{\rho_{\text{air}} U^2}{2} = 4064 \text{ pa} = 40.64 \text{ hpa}$$

On remplace maintenant le manomètre différentiel par un tube en U contenant un liquide incompressible, à savoir de l'eau. Le liquide est immobile en régime stationnaire. Introduisons les points A' et B' (Figure 4)

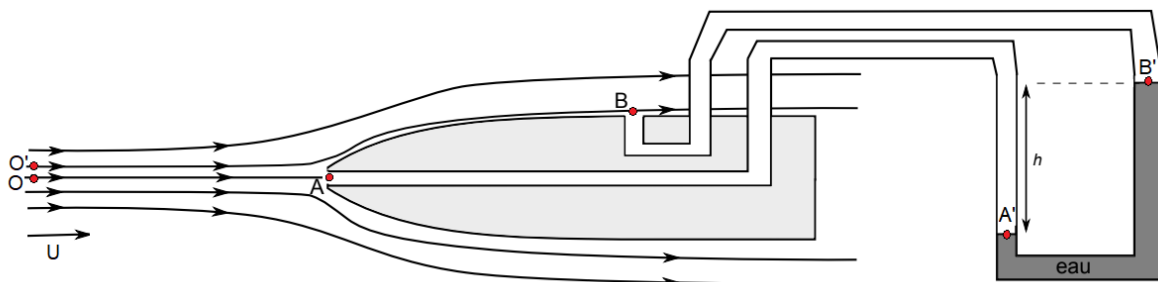


Figure 4: Sonde à mesure de pression dynamique (utilisation d'un tube en U contenant un liquide incompressible en remplacement du manomètre différentiel).

l'air est immobile entre le point B et le point B', il est immobile entre les points A et A'. La colonne de liquide l'est également.

5/ utilisez la relation de la statique des fluides pour donner :

- Une expression de la différence de pression  $p_B - p_{B'}$

La relation de la statique des fluides s'écrit si l'axe z est dirigé vers le haut :

$$\Delta p = -\rho_{fluide} g \Delta z$$

$$p_B - p_{B'} = -\rho_{air} g (z_B - z_{B'})$$

- Une expression de la différence de pression  $p_A - p_{A'}$

$$p_A - p_{A'} = -\rho_{air} g (z_A - z_{A'})$$

- Une expression de la différence de pression  $p_{A'} - p_{B'}$

$$p_{A'} - p_{B'} = -\rho_{eau} g (z_{A'} - z_{B'})$$

6/ en déduire une expression de la différence de pression :  $p_A - p_B$ . Quelles termes peut-on négliger dans cette expression et pourquoi ?

$$p_A - p_B = (p_A - p_{A'}) + (p_B - p_{B'}) + (p_{A'} - p_{B'})$$

$$p_A - p_B = -\rho_{air} g (z_A - z_{A'}) - \rho_{air} g (z_B - z_{B'}) - \rho_{eau} g (z_{A'} - z_{B'})$$

$$\rho_{eau} \gg \rho_{air}$$

Les termes  $\rho_{air} g (z_A - z_{A'})$  et  $\rho_{air} g (z_B - z_{B'})$  sont petits devant le terme  $\rho_{eau} g (z_{A'} - z_{B'})$ , finalement :

$$p_A - p_B = -\rho_{eau} g (z_{A'} - z_{B'})$$

7/Quelle différence de hauteur pour une vitesse de 160 kt ?

On a vu que pour une vitesse de 160 kt, on a  $p_A - p_B = 4064 \text{ pa}$ , ainsi on peut en déduire la différence de hauteur :

$$(z_{B'} - z_{A'}) = \frac{p_A - p_B}{\rho_{eau} g} = 41.4 \text{ cm}$$

8/On mesure maintenant une différence de hauteur de  $z_{B'} - z_{A'}$  de 5 cm, quelle est la vitesse de l'aéronef ?

Dans ce cas,

$$U = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho_{air}}} = \sqrt{\frac{2\rho_{eau} g (z_{B'} - z_{A'})}{\rho_{air}}} = \sqrt{\frac{2\rho_{eau} g (z_{B'} - z_{A'})}{\rho_{air}}} = \frac{28.6 \text{ m}}{\text{s}} = 102.93 \text{ km/h}$$

### EXERCICE 3 : SIMILITUDE

En physique, il est d'usage d'adimensionner les équations afin de faire apparaître des paramètres de similitude et de s'affranchir des unités d'un système.

**1/** Quel est l'intérêt des paramètres de similitude ?

Ils nous permettent de comparer des systèmes de tailles différentes. Ils permettent de simplifier l'analyse d'un système d'équations.

Soit l'équation de Navier Stokes dans le cas d'un écoulement incompressible, dans le cas unidimensionnel et en négligeant les effets de la gravité, elle s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Avec  $u$  la vitesse en (m/s),  $\rho$  la masse volumique (en kg/m<sup>3</sup>),  $p$  la pression du fluide (en pa),  $\nu$  la viscosité cinématique (en m<sup>2</sup>/s).

La viscosité cinématique s'exprime en fonction de la viscosité dynamique :  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$

Soient les paramètres sans dimension suivants :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{U_0 t}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 U_0^2}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Avec :

$L$  une longueur caractéristique **constante** (par exemple la corde d'une aile d'avion)

$U_0$  la vitesse de l'écoulement à l'infini amont (vitesse constante).

$\rho_0$  la masse volumique de l'écoulement à l'infini amont (dans le cas incompressible,  $\rho_0 = \rho$ )

**2/** Montrer que l'équation de Navier Stokes adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{N} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

Avec  $N$ , à déterminer.

On réécrit les équations en considérant les variables adimensionnées.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dt^*}{dt} \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{U_0}{L} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dx^*}{dx} \frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}$$

On remplace dans l'équation :

$$\frac{U_0^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u^* U_0^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{\rho_0 U_0^2}{\rho L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu U_0}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{U_0^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u^* U_0^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{U_0^2}{\rho^* L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu U_0}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

On multiplie tout par  $\frac{L}{U_0^2}$ ,

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{U_0 L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho_0 U_0 L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

**3/** A quel nombre sans dimension correspond  $N$  ? quelle est sa signification physique ?

$N$  correspond au nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu}$$

Le nombre de Reynolds caractérise la transition laminaire turbulent. C'est le rapport des contraintes inertielles sur les contraintes visqueuses. Il permet donc d'évaluer si un écoulement est dominé par les forces visqueuses ou d'inertie.

Soit un aéronef se déplaçant à la vitesse  $v_0$ , à la pression atmosphérique  $p_0$ . On réalise une maquette à l'échelle 1/20. On souhaite effectuer des essais dans une soufflerie à air à la même vitesse que l'aéronef à l'échelle 1/1.

**4/** A quelle pression doit fonctionner la soufflerie si on suppose que la température et la viscosité de l'air reste constante.

Les nombres de Reynolds pour l'aéronef échelle 1/1 et la maquette doivent être identiques :

$$Re_1 = \frac{\rho_1 v_1 L_1}{\mu_1} = Re_2 = \frac{\rho_2 v_2 L_2}{\mu_2}$$

On sait que  $v_1 = v_2 = v_0$  et  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  de plus  $L_2 = \frac{L_1}{20}$

$$Re_1 = \frac{\rho_1 v_0 L_1}{\mu} = Re_2 = \frac{\rho_2 v_0 L_1}{20\mu}$$

Donc on doit avoir  $\rho_1 = \frac{\rho_2}{20}$ , on utilise la loi des gaz parfaits :

$$\rho_1 = p_1 r T_1 = \frac{\rho_2}{20} = \frac{p_2 r T_2}{20}$$

Mais on sait que  $T_1 = T_2 = T$ , et  $p_1 = p_0$

Finalement on obtient :  $p_2 = 20 p_0$

Données :

L'air est régi par la loi des gaz parfaits  $p = \rho r T$

$$\text{Si } x' = a x \text{ alors } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{dx'}{dx} \times \frac{\partial}{\partial x'} = a \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\text{Dans le cas incompressible, } \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} = 1$$

## EXERCICE 4 : TENUE D'INCLINAISON

Afin de concevoir un système de tenue d'inclinaison choisie par le pilote, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$I_x \dot{p} = L_p p + L_{D\delta l} \Delta D \delta l$$

Où l'on a écrit :

- $I_x$  l'inertie de l'aéronef autour de l'axe de roulis

- $p$  la vitesse de rotation de l'aéronef autour de l'axe de roulis

- $\Delta D \delta l$  la variation de position du manche en latéral par rapport à une position d'équilibre initiale pour laquelle on a  $p = 0 \text{ rad. s}^{-1}$

- $L_p$  et  $L_{D\delta l}$  des coefficients dépendant des conditions de vol à l'équilibre initial et des caractéristiques de l'aéronef

1- Décrire l'équation physiquement et expliquer chacun de ses termes.

C'est le théorème du moment cinétique autour de l'axe de roulis de l'aéronef. D'un côté on retrouve les moments (à droite :  $L_p p, L_{D\delta l} \Delta D \delta l$ ) qui génèrent une variation  $\dot{p}$  de la vitesse de roulis  $p$ , plus ou moins marquée suivant l'inertie de l'aéronef  $I_x$ .

Le moment  $L_p p$  provient de la vitesse de roulis puisqu'il en est directement proportionnel.

Le moment  $L_{D\delta l} \Delta D \delta l$  provient d'une variation de position du manche en latéral. Physiquement il dépend de l'efficacité des ailerons (surface, braquage, distance par rapport à l'axe de roulis).

Remarque bonus (non demandée dans la réponse) :

Le moment  $L_p p$  est un moment d'amortissement, il vient du fait que la rotation de l'avion entraîne une variation d'incidence sur les ailes qui tend à freiner l'évolution de la vitesse de roulis.

2- Donner l'expression de la fonction de transfert  $\frac{P}{\Delta D \delta l}$  en Laplace. Et donner la condition de stabilité de l'aéronef. (On notera la variable de Laplace  $s$ )

On a l'équation :

$$I_x \dot{p} = L_p p + L_{D\delta l} \Delta D \delta l$$

En Laplace :

$$I_x s P = L_p P + L_{D\delta l} \Delta D \delta l$$

$$(I_x s - L_p) P = L_{D\delta l} \Delta D \delta l$$

$$\frac{P}{\Delta D \delta l} = \frac{L_{D\delta l}}{I_x s - L_p}$$

La condition de stabilité de l'aéronef est que les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert soient à partie réelle négative. Ici il n'y en a qu'un et il vaut :



$$s = \frac{L_p}{I_x}$$

Il faut donc que l'on ait  $L_p < 0$  pour que l'aéronef soit stable.

Remarque bonus (non demandée dans la réponse) :

On retrouve le fait que le moment  $L_p p$  est un moment d'amortissement, il tend à freiner l'évolution de la vitesse de roulis puisque pour une variation de roulis donnée ( $p > 0$  ou  $p < 0$ ), on a l'accélération  $\dot{p}$  qui est de signe opposé.

- 3- Sachant que la variation d'inclinaison par rapport à la valeur à l'équilibre initial  $\Delta\varphi$  est directement reliée à la vitesse de roulis par la relation :  $\frac{d\Delta\varphi}{dt} = p$ , donner l'expression de la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta DDL}$ . L'aéronef est-il stable ?

On a l'équation :

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = p$$

En Laplace :

$$s\Delta\Phi = P$$

Soit :

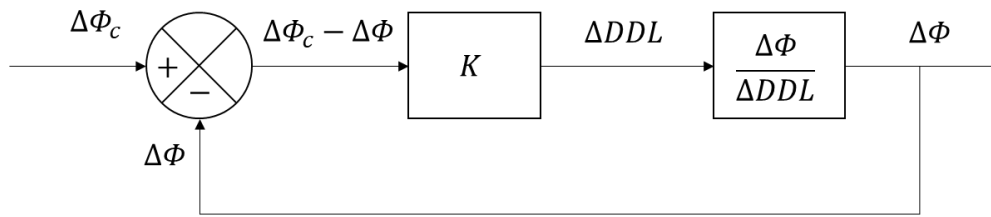
$$\frac{P}{\Delta DDL} = \frac{s\Delta\Phi}{\Delta DDL} = \frac{L_D \delta l}{I_x s - L_p}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta DDL} = \frac{L_D \delta l}{s(I_x s - L_p)}$$

On note que les pôles de la fonction de transfert sont  $s = \frac{L_p}{I_x}$  et 0. L'aéronef est toujours stable, on peut parler de stabilité neutre en inclinaison. Cela traduit tout simplement le fait que (selon notre équation) si le pilote applique une « impulsion » au manche, l'inclinaison de l'avion finira par se stabiliser à une valeur différente de celle de départ. Elle ne revient pas à cette dernière, mais ne diverge pas non plus.

- 4- Dessiner le schéma bloc d'un système de tenue d'inclinaison.  
 Pour cela, on part du principe que l'avion a une certaine inclinaison  $\varphi$  au départ. Le pilote demande alors une variation d'inclinaison consigne  $\Delta\varphi_c$ . Le système agit directement sur la position du manche  $\Delta D\delta l$  et capture la variation d'inclinaison de l'avion  $\Delta\varphi$  générée. L'ordre au manche  $\Delta D\delta l$  varie en fonction de l'écart  $\Delta\varphi_c - \Delta\varphi$ .  
 On supposera le capteur de mesure de la variation d'inclinaison parfait.  
Note : on écrira le gain du correcteur proportionnel  $K$ .

On a le schéma :



Le système capture de manière parfaite la variation d'inclinaison de l'avion et l'on a donc un retour unitaire (aucun gain, bande passante ou retard).

Le système agit de manière directe sur la position du manche en fonction de l'erreur sur l'inclinaison mesurée :

$$\Delta DDL = K(\Delta\Phi_c - \Delta\Phi)$$

On pose qu'une variation de position du manche  $\Delta D\delta l$  positive entraîne une variation de vitesse de roulis  $p$  positive.

5- Donner le signe du gain  $K$ .

D'après le schéma, il faut que le gain  $K$  soit positif. En effet, si le système capte une variation d'inclinaison trop faible par rapport à la valeur consigne ( $\Delta\phi_c - \Delta\phi > 0$ ), il doit faire varier le manche de manière positive ( $\Delta D\delta l > 0$ ) pour augmenter la vitesse de roulis et donc l'inclinaison.

6- Montrer que l'on a la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi_c} = \frac{KL_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l}}$$

On utilise le schéma bloc et la formule de Black :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi_c} = \frac{K \frac{\Delta\Phi}{\Delta DDL}}{1 + K \frac{\Delta\Phi}{\Delta DDL}} = \frac{K \frac{L_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p)}}{1 + K \frac{L_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p)}} = \frac{KL_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l}}$$

7- Après avoir donné le signe du coefficient  $L_{D\delta l}$ , dire si le système est stable.

Bonus : donner la condition sur le gain  $K$  pour qu'il apparaisse des oscillations dans la réponse de l'avion.

On a directement :  $L_{D\delta l} > 0$ , puisqu'une variation de position du manche positive doit faire augmenter la vitesse de roulis, soit donc donner  $\dot{p} > 0$ .

Pour que le système soit stable, il faut que les pôles de la fonction de transfert soient à partie réelle négative. Les pôles sont donnés par l'équation :

$$s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l} = 0$$

$$I_x s^2 - L_p s + KL_{D\delta l} = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = L_p^2 - 4KL_{D\delta l}I_x > 0$$

Le signe dépendant de la valeur de  $K$  puisque  $L_p^2 > 0$  et  $KL_{D\delta l}I_x > 0$ .

Dans tous les cas on a la partie réelle des pôles qui vaut soit :

-Pour un discriminant positif :

$$Re(s_{\pm}) = \frac{L_p \pm \sqrt{\Delta}}{2I_x} < 0$$

Puisque  $\Delta < L_p^2$  donc  $\sqrt{\Delta} < |L_p|$ .

-Pour un discriminant négatif :

$$Re(s_{\pm}) = \frac{L_p}{2I_x} < 0$$

Le système est donc bien stable, peu importe la valeur du gain  $K$ . Le cas limite étant  $K = 0$  pour lequel on retrouve notre aéronef naturel, et donc une racine nulle.

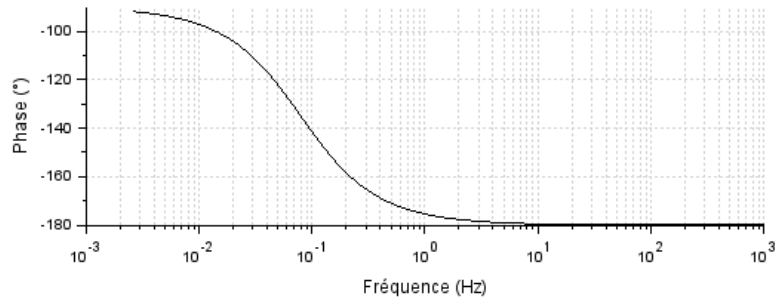
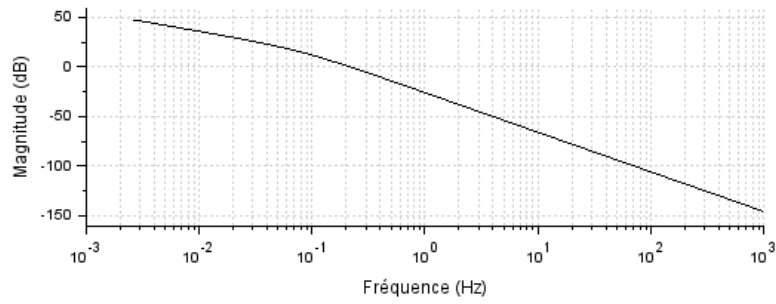
En revanche, il va apparaître des oscillations dans la réponse de l'avion suite aux corrections du système dès lors que l'on a un discriminant négatif, soit :

$$\Delta = L_p^2 - 4KL_{D\delta l}I_x < 0$$

$$4KL_{D\delta l}I_x > L_p^2$$

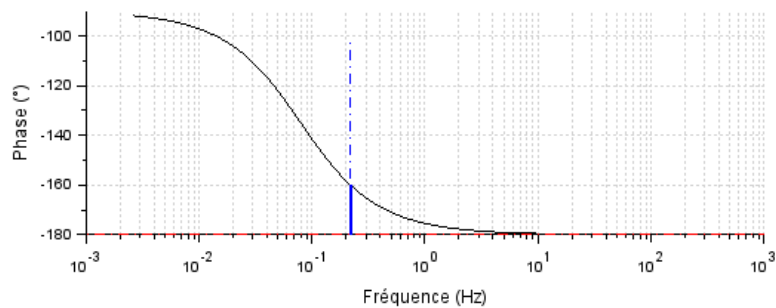
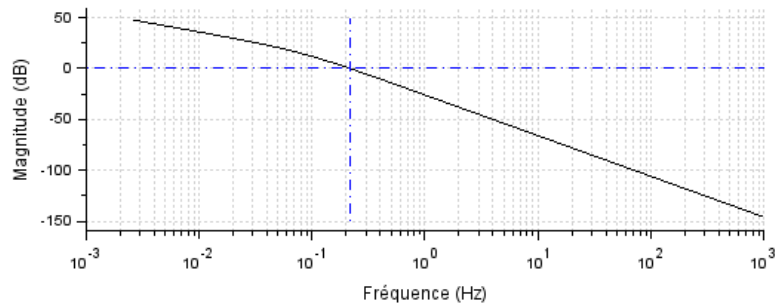
$$K > \frac{L_p^2}{4L_{D\delta l}I_x}$$

On a tracé le diagramme de Bode de notre avion naturel.



8- Donner les marges de gain et de phase. Est-ce surprenant ?

On a une marge de gain infinie et une marge de phase de  $20^\circ$  :



La marge de gain n'est pas surprenante, on retrouve la même conclusion qu'à la question précédente.

- 9- Pour une consigne du pilote de type échelon d'amplitude  $\varphi_{c0}$ , donner l'erreur sur la variation d'inclinaison de l'avion réellement obtenue.

On utilise le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Avec :

$$\varepsilon(t) = \Delta\varphi_c - \Delta\varphi$$

Et :

$$E(s) = \Delta\Phi_c - \Delta\Phi$$

Donc :

$$\begin{aligned} sE(s) &= s(\Delta\Phi_c - \Delta\Phi) = s\Delta\Phi_c \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi_c}\right) \\ &= s\Delta\Phi_c \left(1 - \frac{KL_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l}}\right) \\ &= s \frac{\varphi_{c0}}{s} \left(1 - \frac{KL_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l}}\right) \\ &= \varphi_{c0} \left(1 - \frac{KL_{D\delta l}}{s(I_x s - L_p) + KL_{D\delta l}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \varphi_{c0} \left(1 - \frac{KL_{D\delta l}}{KL_{D\delta l}}\right) = 0$$

L'erreur est nulle.

- 10- Est-ce un résultat étonnant ? Pour plus de représentativité, qu'aurait-on dû modifier dans notre schéma bloc ?

Le capteur mesurant la variation d'inclinaison de l'avion était supposé parfait. De plus, le système étant stable, il est parfaitement logique de trouver une erreur nulle.

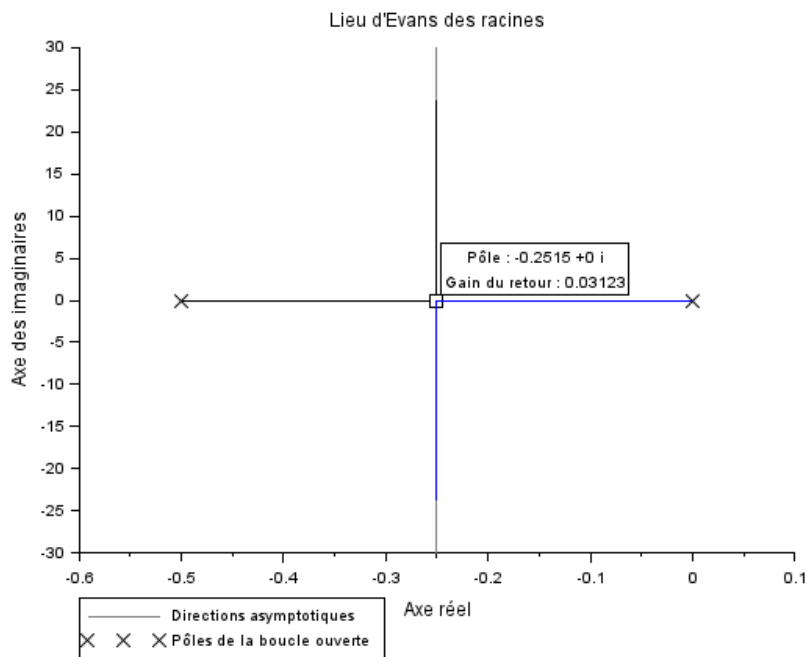
Pour plus de représentativité, il aurait fallu modifier la fonction de transfert du capteur, en tenant compte du fait qu'il pouvait mesurer l'inclinaison avec une erreur.

Dans ce cas l'avion se stabiliserait à l'inclinaison que le capteur croit être celle voulue par le pilote, mais afficherait en réalité une certaine erreur.

Question bonus

On donne  $I_x = 2\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $L_{D\delta l} = 4\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-2}$  et  $L_p = -1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .  
(Valeurs données à titre indicatif)

11- Décrivez le graphique suivant :



Ce graphique représente le lieu des pôles de notre système en partant de la boucle ouverte, qui est directement notre avion naturel :



On a donc les pôles qui sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta DDL} = \frac{L_D \delta l}{s(I_x s - L_p)}$$

Soit 0 et  $\frac{L_p}{I_x} = -0,5$ .

Ensuite, le lieu d'Evans trace les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée du système en fonction de la valeur du gain  $K$ .

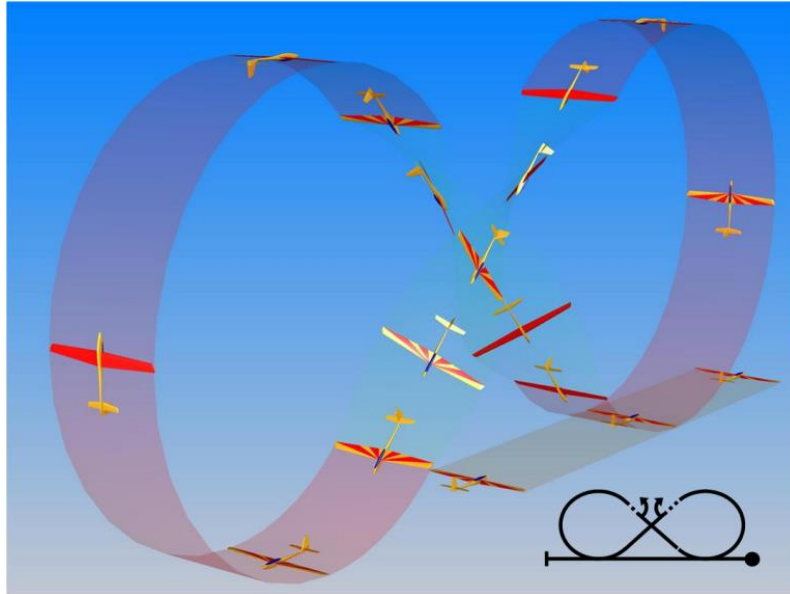
On retrouve bien le fait qu'il apparait des oscillations à partir du gain :

$$K = \frac{L_p^2}{4L_D \delta l I_x} = \frac{1\ 000^2}{4.4\ 000.2\ 000} = \frac{1}{4.4.2} = \frac{1}{32} = 0,031$$

De plus, on voit que le système est toujours bien stable, peu importe la valeur du gain. Et la partie réelle des pôles dès lors qu'ils sont complexes est bien égale à  $\frac{L_p}{2I_x} = \frac{1\ 000}{2.2\ 000} = 0,25$ .

## EXERCICE 5 : MECANIQUE DU POINT

On s'intéresse au mouvement d'un avion (assimilé à un point matériel  $G$  de masse  $m$ ) pendant une manœuvre de type « huit cubain » :



On définit deux repères :

- terrestre (supposé Galiléen)  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  avec  $O$  un point fixe de la Terre,  $\vec{x}_0$  pointé dans le sens d'avancement initial de l'avion,  $\vec{y}_0$  pointé vers la droite et  $\vec{z}_0$  vers le bas
- avion  $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  avec  $G$  le centre de gravité de l'avion,  $\vec{x}$  pointé vers le nez de l'avion,  $\vec{y}$  pointé vers la droite et  $\vec{z}$  vers le bas

La trajectoire de l'avion est contenue dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ .

On notera l'inertie de l'avion autour de ses différents axes respectivement  $I_x, I_y, I_z$ .

On notera :

- la poussée  $\vec{T}$
- la portance  $\vec{F}_z$
- la traînée  $\vec{F}_x$

On suppose que l'angle de calage des moteurs est nul de sorte que  $\vec{T} = T\vec{x}$ .

A. Première phase : palier à vitesse constante

1- Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à l'avion.

$$m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_z + \vec{F}_x$$

On définit l'assiette comme étant l'angle de rotation autour de l'axe  $\vec{y} = \vec{y}_0$  entre les deux repères terrestre et avion.

On écrira le coefficient de portance de l'aile  $C_z(\alpha) = C_{z\alpha}\alpha$ , et le coefficient de traînée  $C_x(\alpha) = C_{x0} + kC_z^2$ .

- 2- Donner l'expression du calage des ailes  $\gamma_{cal}$  pour que l'assiette soit nulle dans les conditions de vol données.

On projette le PFD suivant l'axe vertical terrestre :

$$mg - T \sin \theta - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z = 0$$

Et l'axe horizontal terrestre :

$$T \cos \theta - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x = 0$$

Pour une assiette nulle, on a directement :

$$mg - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z = 0$$

Soit :

$$\alpha = \frac{2mg}{\rho S V^2 C_{z\alpha}}$$

Donc il faut caler les ailes d'un angle  $\gamma_{cal} = \alpha$  pour que l'assiette soit nulle dans ces conditions.

Données:

$$\begin{aligned} m &= 750 \text{ kg} \\ \rho &= 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ S &= 10,85 \text{ m}^2 \\ V &= 200 \text{ km/h} \\ C_{z\alpha} &= 5,7 \text{ rad}^{-1} \\ C_{x0} &= 0,006 \\ k &= 0,05 \\ S C_{x \text{ fus+trains}} &= 1,5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- 3- Donner la poussée des moteurs, en supposant que le calage des ailes est celui qui permet d'avoir une assiette nulle.

On calcule l'incidence/calage des ailes :

$$\gamma_{cal} = \alpha = \frac{2mg}{\rho S V^2 C_{z\alpha}} = \frac{2 \cdot 750 \cdot 9,81}{1,225 \left(\frac{200}{3,6}\right)^2 \cdot 5,7} = 0,06 \text{ rad} = 3,6^\circ$$

Ensuite on a :

$$T \cos \theta - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x = 0$$



Qui donne :

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 (SC_x + SC_{x_{fus+trains}}) = \frac{1}{2} 1,225 \left( \frac{200}{3,6} \right)^2 (10,85 [0,006 + 0,05 \cdot (5,70,06)^2] + 1,5)$$
$$= 3\,100 \text{ N}$$

## B. Deuxième phase: la boucle

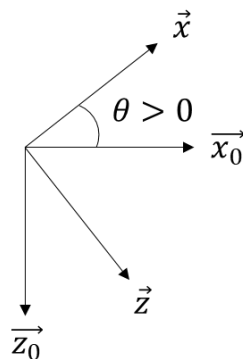
On supposera que l'avion décrit un cercle parfait de rayon  $R$ , et que le vecteur vitesse est toujours porté par l'axe  $\vec{x}$ .

4- Ecrire les deux relations données par le PFD projeté suivant les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

On a :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_z + \vec{F}_x$$

Avec :



Soit :

$$m\vec{a} = mg\vec{z}_0 + T\vec{x} - F_z\vec{z} - F_x\vec{x}$$

Avec :

$$F_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z$$

$$F_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x$$

Donc suivant l'axe  $\vec{x}$  :

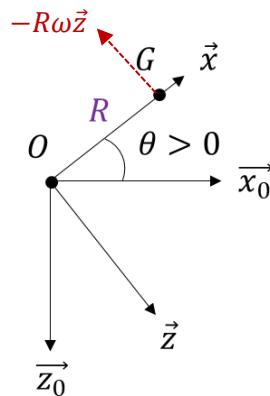
$$ma_x = -mg\sin\theta + T - F_x$$

Et suivant l'axe  $\vec{z}$  :

$$ma_z = mg\cos\theta - F_z$$

5- Montrer que la norme de l'accélération centripète d'un point matériel décrivant un cercle de rayon  $R$  à vitesse de rotation constante  $\omega$  s'écrit  $R\omega^2$ .

On prend le schéma :



On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt_{R_0}^2} &= R \frac{d^2 \vec{x}}{dt_{R_0}^2} = R \frac{d}{dt_{R_0}} \left( \frac{d\vec{x}}{dt_{R_0}} \right) = R \frac{d}{dt_{R_0}} \left( \frac{d\vec{x}}{dt_R} + \frac{d\theta}{dt} \vec{y} * \vec{x} \right) = R \frac{d}{dt_{R_0}} (-\omega \vec{z}) \\ &= -R\omega \left( \frac{d\vec{z}}{dt_R} + \frac{d\theta}{dt} \vec{y} * \vec{z} \right) = -R\omega^2 \vec{x} \end{aligned}$$

6- Ecrire les relations en supposant que la vitesse de l'avion est constante.

Dans notre cas on doit avoir  $a_x = 0$  et  $a_z = -mR\omega^2$  soit :

$$0 = -mg \sin \theta + T - F_x$$

$$-mR\omega^2 = mg \cos \theta - F_z$$

7- Quelle incohérence voit-on apparaitre ? Commentaires ?

Si  $V = R\omega$  est constante, c'est que  $\omega$  l'est également. Donc  $mR\omega^2 = cste$  et  $F_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z = cste$  car on a supposé que la vitesse était toujours portée par le vecteur  $\vec{x}$ , donc l'incidence est nécessairement constante.

Donc d'après la seconde relation on a  $mg \cos \theta = cste$  donc  $\theta = cste$ , ce qui est incohérent.

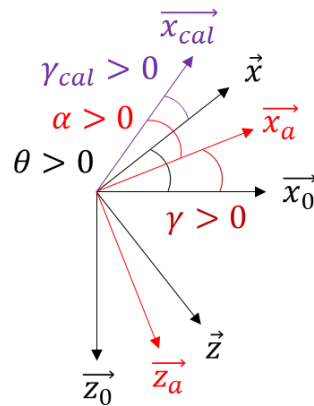
On le comprend bien puisque l'on souhaite une accélération constante suivant l'axe  $\vec{z}$ , sachant que le poids participe à celle-ci et sa composante n'est pas constante au cours de la rotation de l'avion...

Si l'on veut une accélération constante dans nos conditions, il faut que l'incidence varie.

On introduit le repère air comme suit :  $(G, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$  avec  $\vec{x}_a$  qui porte le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et  $\vec{z}_a$  vers le bas et contenu dans le plan de symétrie de l'avion.

- 8- Donner la relation entre assiette, incidence, pente (angle entre les vecteurs  $\vec{x}_a$  et  $\vec{x}_0$ ) et calage des ailes.

On a le schéma suivant :



Et il apparait directement que :

$$\gamma + \alpha = \theta + \gamma_{cal}$$

- 9- Ecrire les deux relations du PFD dans le repère air.

On a toujours :

$$m\vec{a} = mg\vec{z}_0 + T\vec{x} - F_z\vec{z} - F_x\vec{x}$$

Soit :

$$ma_{x_a} = -mgsin\gamma + Tcos(\alpha - \gamma_{cal}) - F_x$$

$$ma_{z_a} = mgcos\gamma - Tsin(\alpha - \gamma_{cal}) - F_z$$

On suppose que :

- l'angle  $\alpha - \gamma_{cal}$  reste très petit
- la vitesse est toujours constante pendant la boucle, de valeur connue
- on connait l'altitude ( $\rho$ )
- la projection de la poussée suivant l'axe  $\vec{z}_a$  est négligeable devant celle de la portance

- 10- Donner un moyen de déterminer les inconnues du problème.

On a :

$$ma_{x_a} = 0 = -mgsin\gamma + T - F_x$$

$$ma_{z_a} = -mR \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = mgcos\gamma - F_z$$

On connaît par hypothèse  $V$ , donc  $R \frac{d\gamma}{dt}$ , donc  $\gamma(t)$  pendant la boucle.

On détermine  $\alpha$  et  $T$  en écrivant :

$$0 \approx -mgsin\gamma + T - \frac{1}{2}\rho SV^2 C_x$$

$$-mR \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \approx mgcos\gamma - \frac{1}{2}\rho SV^2 C_z$$

Sachant que :

$$C_z(\alpha) = C_{z\alpha}\alpha$$

$$C_x(\alpha) = C_{x0} + kC_z^2$$

Ce qui nous laisse deux équations et deux inconnues.

La seconde permet de connaître  $\alpha(t)$  :

$$\frac{1}{2}\rho SV^2 C_z \approx mgcos\gamma + mR \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2$$

$$C_z \approx \frac{2}{\rho SV^2} \left[ mgcos\gamma + mR \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \right]$$

$$\alpha(t) \approx \frac{2}{\rho SV^2 C_{z\alpha}} \left[ mgcos\gamma + mR \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \right]$$

La première permet d'en déduire la poussée  $T(t)$  :

$$T = mgsin\gamma + \frac{1}{2}\rho SV^2 C_x$$

Enfin on peut trouver l'évolution de l'assiette  $\theta(t)$  grâce à l'équation angulaire :

$$\theta(t) = \gamma(t) + \alpha(t) - \gamma_{cal}$$

### C. Troisième phase : le retourné

On peut de nouveau supposer que le vecteur vitesse est porté par l'axe  $\vec{x}$ .

- 11- Quelle équation supplémentaire est à prendre en compte pour décrire le mouvement de l'avion pendant cette phase ? Ecrire cette relation de manière générale.

Le Théorème du Moment Cinétique projeté suivant l'axe  $\vec{x}$ . On peut l'écrire sous la forme :

$$I_x \dot{p} = L$$

Avec  $p$  la vitesse de rotation de l'avion autour de l'axe  $\vec{x}$ , et  $L$  la projection de la somme des moments s'exerçant sur l'avion suivant ce même axe.

12- Expliquer de manière grossière quels phénomènes sont à prendre en compte dans cette relation pour décrire le mouvement de rotation de l'avion.

Ce qui met en rotation l'avion c'est la différence de portance entre ses deux ailes. Cela est rendu possible grâce au braquage des ailerons de manière antisymétrique. D'un côté on baisse l'aileron pour augmenter la portance de l'aile, de l'autre on le monte afin de la réduire.

Suivant la position de l'aileron par rapport à l'axe avion  $\vec{x}$ , on a un moment généré plus ou moins important. Le moment total des deux ailes met en rotation l'avion.

Pour aller plus loin, on peut prendre en compte l'amortissement aérodynamique dû à l'effet de la vitesse de rotation  $p$  sur l'incidence des ailes. En effet, l'aile qui voit sa portance augmenter va donc « monter ». La vitesse perçue par l'aile viendra un peu plus du dessus, réduisant son incidence et donc sa portance. Inversement pour l'aile dont la portance diminue. Globalement cela tend à amortir le mouvement de l'avion en roulis, et évite que l'on trouve mathématiquement une vitesse de rotation qui ne se stabilise jamais...

Pour aller encore plus loin, on peut prendre en compte les effets de couplage inertiel dus à une répartition de masse non uniforme autour de l'axe de roulis (dans le plan  $(\vec{x}, G, \vec{z})$ ).

La mise en rotation de l'avion autour de l'axe de roulis génère une vitesse de lacet, qui elle-même aura une répercussion sur la vitesse de roulis.

On doit alors écrire les deux équations :

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} &= L + I_{xz} \dot{r} \\ I_z \dot{r} &= N + I_{xz} \dot{p} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} L + \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} N \\ \dot{r} &= \frac{I_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} N + \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} L \end{aligned}$$

Avec  $I_{xz}$  le terme d'inertie croisé qui témoigne de la répartition non uniforme de la masse autour de l'axe de roulis.