

CORRIGE EXERCICES AUTOMATIQUE

Table des matières

Exercices simples d'application	2
Exercice 1 – Transformée de Laplace	2
Exercice 2 – Système du premier ordre	3
Exercice 3 – Système du second ordre	5
Exercice 4 – Diagramme de Bode	13
Exercice 5 – Lieu des racines (Evans)	19
Exercice 6 – Modification de la dynamique d'un système	23
Exercice 7 – Stabilisation d'un système	28
Exercice 8 – Diagramme de Bode et Nyquist (bonus)	31
Exercice 9 – Conditions de stabilité (Bode, Evans, Nyquist)	36
Exercice concret	44
Exercice – Système de capture et maintien de la vitesse d'une voiture	44

Exercices simples d'application

Exercice 1 – Transformée de Laplace

Donner l'expression de la transformée de Laplace $F(p)$ (avec la variable complexe $p = j\omega$) des fonctions $f : t \rightarrow \dots$, avec $t \geq 0$ la variable temporelle.

1- Impulsion de Dirac : $f(t) = \delta(t)$

On a :

$$F(p) = 1$$

2- Echelon : $f(t) = K$ avec K une constante

On a :

$$F(p) = \frac{K}{p}$$

3- Rampe : $f(t) = Kt$ avec K une constante

On a :

$$F(p) = \frac{K}{p^2}$$

4- Montrer que l'expression de la transformée inverse de Laplace de la fonction :

$$F(p) = \frac{K}{Ap + B}$$

Avec K, A, B des constantes est :

$$f(t) = \frac{K}{A} e^{-\frac{B}{A}t}$$

On a la transformée inverse usuelle :

$$F(p) = \frac{1}{p - a} \rightarrow f(t) = e^{at}$$

Avec a une constante.

Donc ici on a :

$$F(p) = \frac{K}{Ap + B} = \frac{K}{A} \frac{1}{p + \frac{B}{A}} \rightarrow f(t) = \frac{K}{A} e^{-\frac{B}{A}t}$$

Exercice 2 – Système du premier ordre

On considère un système défini par un paramètre d'état f , qui est une fonction solution de l'équation différentielle suivante :

$$A \frac{df(t)}{dt} + Bf(t) = g(t)$$

Avec A, B des constantes et g une fonction représentant une commande ou perturbation pouvant influencer sur le fonctionnement de notre système (et donc son paramètre d'état).

Pour simplifier on suppose des conditions initiales nulles pour les fonctions f et g .

1- Donner l'expression de la fonction de transfert :

$$\frac{F(p)}{G(p)}$$

On écrit :

$$ApF(p) + BF(p) = G(p)$$

Soit :

$$F(p)[Ap + B] = G(p)$$

$$\frac{F(p)}{G(p)} = \frac{1}{Ap + B}$$

2- Déterminer les racines du dénominateur de la fonction de transfert (aussi appelé pôles).

On a directement :

$$Ap + B = 0$$

$$p = -\frac{B}{A}$$

On a un unique pôle réel.

3- Pour une excitation de type échelon d'amplitude K , donner l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$.

On écrit :

$$F(p) = \frac{G(p)}{Ap + B} = \frac{\frac{K}{p}}{Ap + B} = \frac{K}{p(Ap + B)} = K \left[\frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{Ap + B} \right]$$

Avec K_1, K_2 des constantes que l'on doit déterminer.

On a :

$$\frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{Ap + B} = \frac{K_1(Ap + B) + K_2p}{p(Ap + B)} = \frac{(K_1A + K_2)p + K_1B}{p(Ap + B)} = \frac{1}{p(Ap + B)}$$

Donc forcément :

$$\begin{aligned}K_1 A + K_2 &= 0 \\K_1 B &= 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}K_2 &= -K_1 A = -\frac{A}{B} \\K_1 &= \frac{1}{B}\end{aligned}$$

Donc :

$$F(p) = \frac{K}{B} \left[\frac{1}{p} - \frac{A}{Ap + B} \right] = \frac{K}{B} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{B}{A}} \right]$$

Dont la transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{K}{B} \left(1 - e^{-\frac{B}{A}t} \right)$$

4- Quelle est la condition de stabilité du système ?

Pour qu'une fonction de transfert soit stable, il faut que ses pôles aient une partie réelle négative (ce que l'on comprend tout à fait en observant la réponse à un échelon calculée précédemment).

Ici on a juste un pôle qui vaut $-\frac{B}{A}$, il faut donc que A, B soient de même signe.

On traitera toujours de cas où A représente l'inertie d'un arbre en rotation, ou la masse d'un objet donc $A > 0$. Il faut donc que le coefficient de rappel B soit positif, cela signifie qu'il doit y avoir un phénomène de rappel à la position initiale pour que notre système soit stable.

On suppose que la fonction de transfert est stable.

5- En utilisant d'une part le résultat de la question 3, et d'autre part le théorème de la valeur finale, montrer que le paramètre d'état f tend bien vers $\frac{K}{B}$ avec le temps.

D'une part on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K}{B} \left(1 - e^{-\frac{B}{A}t} \right) = \frac{K}{B}$$

Mais également :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K F(p)}{p G(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{Ap + B} = \frac{K}{B}$$

Où l'on a écrit que la transformée $F(p)$ était égale à l'entrée de type échelon $\frac{K}{p}$ multipliée par la fonction de transfert $\frac{F(p)}{G(p)}$.

Exercice 3 – Système du second ordre

On considère un système défini par un paramètre d'état f , qui est une fonction solution de l'équation différentielle suivante :

$$A \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + B \frac{df(t)}{dt} + Cf(t) = g(t)$$

Avec A, B, C des constantes et g une fonction représentant une commande ou perturbation pouvant influencer sur le fonctionnement de notre système (et donc son paramètre d'état). Pour simplifier on suppose des conditions initiales nulles pour les fonctions f et g .

1- Donner l'expression de la fonction de transfert :

$$\frac{F(p)}{G(p)}$$

On écrit :

$$Ap^2 F(p) + BpF(p) + CF(p) = G(p)$$

Soit :

$$F(p)[Ap^2 + Bp + C] = G(p)$$

$$\frac{F(p)}{G(p)} = \frac{1}{Ap^2 + Bp + C}$$

2- Déterminer les pôles de la fonction de transfert (que l'on notera p_+, p_-).

On doit résoudre une équation du second degré :

$$Ap^2 + Bp + C = 0$$

Donc le discriminant vaut :

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

On doit considérer trois cas :

a- $\Delta > 0$:

On a alors :

$$p_+ = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \text{ et } p_- = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

b- $\Delta = 0$:

On a alors :

$$p_+ = p_- = p_{\pm} = \frac{-B}{2A}$$

c- $\Delta < 0$:

On a alors :

$$p_+ = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{ et } p_- = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}$$

Dans tous les cas on a deux pôles (équation du second degré). Mais ils peuvent être réels (cas a et b) ou complexes conjugués (cas c).

On suppose que les pôles sont réels, non nuls et distincts.

- 3- Pour une excitation de type impulsion, montrer que l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$ est :

$$f(t) = \frac{\tau_+ \tau_-}{A} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_+}} - e^{-\frac{t}{\tau_-}}}{\tau_+ - \tau_-}$$

Avec : $\tau_+ = -\frac{1}{p_+}$ et $\tau_- = -\frac{1}{p_-}$.

Aide : Ecrire le numérateur de la fonction de transfert sous forme factorisée, et l'on donne la transformée inverse de Laplace :

$$F(p) = \frac{1}{(1+ap)(1+bp)} \rightarrow f(t) = \frac{e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}}}{a-b}$$

On écrit :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{G(p)}{Ap^2 + Bp + C} = \frac{1}{A} \frac{G(p)}{p^2 + \frac{B}{A}p + \frac{C}{A}} \\ &= \frac{1}{A} \frac{1}{(p-p_+)(p-p_-)} \end{aligned}$$

Puisque la transformée de Laplace de l'impulsion est directement $G(p) = 1$.

Remarque :

Les solutions de $Ap^2 + Bp + C = 0$ sont aussi celles de $p^2 + \frac{B}{A}p + \frac{C}{A} = 0$.

Donc :

$$F(p) = \frac{1}{A} \cdot \frac{-1}{p_+} \cdot \frac{-1}{p_-} \frac{1}{\left(-\frac{1}{p_+}p + 1\right)\left(-\frac{1}{p_-}p + 1\right)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{-1}{p_+} \cdot \frac{-1}{p_-} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_+}p\right)\left(1 - \frac{1}{p_-}p\right)}$$

On note :

$$\begin{aligned} \tau_+ &= -\frac{1}{p_+} \\ \tau_- &= -\frac{1}{p_-} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$F(p) = \frac{\tau_+ \tau_-}{A} \frac{1}{(1 + \tau_+ p)(1 + \tau_- p)}$$

Dont la transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{\tau_+ \tau_-}{A} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_+}} - e^{-\frac{t}{\tau_-}}}{\tau_+ - \tau_-}$$

Remarque :

Dans le cas où l'on a un pôle nul il vient que :

$$F(p) = \frac{G(p)}{Ap^2 + Bp + C} = \frac{1}{A} \frac{1}{p(p-p_+)} = \frac{\tau_+}{A} \frac{1}{p} \frac{1}{(1 + \tau_+ p)}$$

Soit :

$$\frac{\tau_+ 1}{A p (1 + \tau_+ p)} = \frac{\tau_+}{A} \left[\frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{1 + \tau_+ p} \right] = \frac{\tau_+ K_1 (1 + \tau_+ p) + K_2 p}{A p (1 + \tau_+ p)} = \frac{\tau_+ K_1 + (K_2 \tau_+ + K_2) p}{A p (1 + \tau_+ p)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 \\ K_2 &= -K_1 \tau_+ = -\tau_+ \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F(p) = \frac{\tau_+}{A} \left[\frac{1}{p} - \frac{\tau_+}{1 + \tau_+ p} \right]$$

Dont la transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{\tau_+}{A} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_+}} \right)$$

On voit dans ce cas que la réponse ne tend pas vers 0, mais $\frac{\tau_+}{A}$.

On suppose que les pôles sont réels, non nuls et égaux.

- 4- Pour une excitation de type impulsion, montrer que l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$ est :

$$f(t) = \frac{t}{A} e^{-\frac{t}{\tau_{\pm}}}$$

Avec : $\tau_{\pm} = -\frac{1}{p_{\pm}} \left(= -\frac{1}{p_+} = -\frac{1}{p_-} \right)$.

Aide : Ecrire le numérateur de la fonction de transfert sous forme factorisée, et l'on donne la transformée inverse de Laplace :

$$F(p) = \frac{1}{(1 + ap)^2} \rightarrow f(t) = \frac{1}{a^2} t e^{-\frac{t}{a}}$$

On écrit :

$$F(p) = \frac{G(p)}{Ap^2 + Bp + C} = \frac{1}{A} \frac{1}{(p - p_{\pm})^2} = \frac{1}{A} \left(\frac{-1}{p_{\pm}} \right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_{\pm}} p \right)^2}$$

On note :

$$\tau_{\pm} = -\frac{1}{p_{\pm}}$$

Donc on a :

$$F(p) = \frac{\tau_{\pm}^2}{A} \frac{1}{(1 + \tau_{\pm} p)^2}$$

Dont la transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{\tau_{\pm}^2}{A} \frac{1}{\tau_{\pm}^2} t e^{-\frac{t}{\tau_{\pm}}} = \frac{t}{A} e^{-\frac{t}{\tau_{\pm}}}$$

On suppose que les pôles sont complexes conjuguées.

- 5- Pour une excitation de type impulsion, montrer que l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$ est :

$$f(t) = \frac{1}{A \cdot \text{Im}(p_{\pm})} \sin(\text{Im}(p_{\pm})t) e^{\text{Re}(p_{\pm})t}$$

Avec : $\text{Re}(p_{\pm})$ et $\text{Im}(p_{\pm})$ respectivement les parties réelle et imaginaire des pôles de la fonction $F(p)$.

On écrit comme pour le cas des pôles réels distincts :

$$F(p) = \frac{1}{A} \frac{-1}{p_+} \frac{-1}{p_-} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_+}p\right) \left(1 - \frac{1}{p_-}p\right)}$$

Dont la transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{1}{A} \frac{-1}{p_+} \frac{-1}{p_-} \frac{e^{p_+t} - e^{p_-t}}{-\frac{1}{p_+} + \frac{1}{p_-}}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_+} &= -\frac{1}{\text{Re}(p_+) + i\text{Im}(p_+)} = -\frac{\text{Re}(p_+) - i\text{Im}(p_+)}{\text{Re}(p_+)^2 + \text{Im}(p_+)^2} \\ \frac{1}{p_-} &= -\frac{1}{\text{Re}(p_-) - i\text{Im}(p_-)} = -\frac{\text{Re}(p_-) + i\text{Im}(p_-)}{\text{Re}(p_-)^2 + \text{Im}(p_-)^2} \end{aligned}$$

Mais comme les parties réelle et imaginaire des deux pôles sont égales on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{Re}(p_+) &= \text{Re}(p_-) = \text{Re}(p_{\pm}) \\ \text{Im}(p_+) &= \text{Im}(p_-) = \text{Im}(p_{\pm}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{-1}{p_+} \frac{-1}{p_-} = \frac{1}{\text{Re}(p_{\pm})^2 + \text{Im}(p_{\pm})^2}$$

Et :

$$-\frac{1}{p_+} + \frac{1}{p_-} = -\frac{\text{Re}(p_{\pm}) - i\text{Im}(p_{\pm})}{\text{Re}(p_{\pm})^2 + \text{Im}(p_{\pm})^2} + \frac{\text{Re}(p_{\pm}) + i\text{Im}(p_{\pm})}{\text{Re}(p_{\pm})^2 + \text{Im}(p_{\pm})^2} = \frac{2i\text{Im}(p_{\pm})}{\text{Re}(p_{\pm})^2 + \text{Im}(p_{\pm})^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{A} \frac{-1}{p_+} \frac{-1}{p_-} \frac{e^{p_+t} - e^{p_-t}}{-\frac{1}{p_+} + \frac{1}{p_-}} = \frac{1}{A} \frac{1}{\text{Re}(p_{\pm})^2 + \text{Im}(p_{\pm})^2} \frac{e^{[\text{Re}(p_{\pm})+i\text{Im}(p_{\pm})]t} - e^{[\text{Re}(p_{\pm})-i\text{Im}(p_{\pm})]t}}{\frac{2i\text{Im}(p_{\pm})}{\text{Re}(p_{\pm})^2 + \text{Im}(p_{\pm})^2}} \\ &= \frac{1}{A} \frac{e^{[\text{Re}(p_{\pm})+i\text{Im}(p_{\pm})]t} - e^{[\text{Re}(p_{\pm})-i\text{Im}(p_{\pm})]t}}{2i\text{Im}(p_{\pm})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{A} \frac{e^{Re(p_{\pm})t} e^{iIm(p_{\pm})t} - e^{-iIm(p_{\pm})t}}{2i} = \frac{1}{A} \frac{e^{Re(p_{\pm})t}}{Im(p_{\pm})} \sin(Im(p_{\pm})t)$$

$$f(t) = \frac{1}{A \cdot Im(p_{\pm})} \sin(Im(p_{\pm})t) e^{Re(p_{\pm})t}$$

6- Quelle est la condition de stabilité du système ?

Pour qu'une fonction de transfert soit stable, il faut que ses pôles aient une partie réelle négative (ce que l'on comprend tout à fait en observant les réponses calculées précédemment).

Ici on a deux pôles, suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert) on doit avoir comme condition :

a- $\Delta > 0$:

$$p_+ = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \text{ et } p_- = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \rightarrow p_+ \text{ et } p_- < 0 \text{ ou } \tau_+ \text{ et } \tau_- > 0$$

b- $\Delta = 0$:

$$p_{\pm} = \frac{-B}{2A} \rightarrow p_{\pm} < 0 \text{ ou } \tau_{\pm} > 0$$

c- $\Delta < 0$:

$$p_+ = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} = Re(p_{\pm}) + iIm(p_{\pm}) \text{ et } p_- = Re(p_{\pm}) - iIm(p_{\pm}) \rightarrow Re(p_{\pm}) < 0$$

On remarque donc que dans le cas où le discriminant est positif il faut que :

$$-B - \sqrt{\Delta} < 0 \text{ et } -B + \sqrt{\Delta} < 0$$

$$B > -\sqrt{\Delta} \text{ et } B > \sqrt{\Delta}$$

Donc nécessairement :

$$B > \sqrt{\Delta} = \sqrt{B^2 - 4AC} > 0$$

Soit :

$$B^2 > B^2 - 4AC$$

$$0 > -4AC$$

$$AC > 0$$

Et l'on aura toujours $A > 0$ (inertie d'un arbre en rotation, masse d'un objet etc.)

Donc la condition de stabilité est simplement :

$$C > 0$$

Le coefficient de rappel doit être positif. Autrement dit, il doit y avoir un phénomène de rappel à la position initiale lorsque le système est perturbé.

Dans le cas où le discriminant est nul ou négatif il faut que l'on ait :

$$B > 0$$

Le coefficient d'amortissement doit être positif. Autrement dit, il doit y avoir un phénomène de ralentissement de l'évolution du paramètre d'état de notre système.

Au passage on note que dans ce cas on a $\Delta = B^2 - 4AC < 0 \rightarrow 4AC > B^2 > 0 \rightarrow C > 0$.

On suppose que la fonction de transfert est stable.

7- En utilisant d'une part le résultat des questions 3, 4 et 5, et d'autre part le théorème de la valeur finale, montrer que le paramètre d'état f tend bien vers 0 avec le temps.

a- Cas où les racines sont réelles distinctes :

D'une part on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau_+ \tau_- \frac{e^{-\tau_+ t} - e^{-\tau_- t}}{\tau_+ - \tau_-} = 0$$

Mais également :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot 1 \cdot \frac{F(p)}{G(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{Ap^2 + Bp + C} = 0$$

Où l'on a écrit que la transformée $F(p)$ était égale à l'entrée de type impulsion "1" multipliée par la fonction de transfert $\frac{F(p)}{G(p)}$.

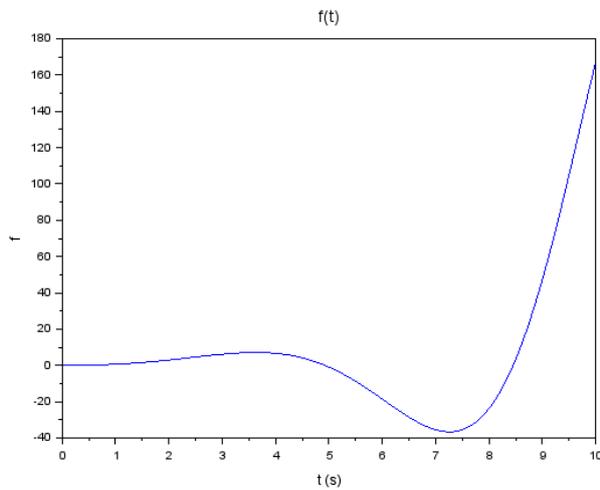
b- Cas où les racines sont réelles égales :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\frac{t}{\tau_{\pm}}} = 0$$

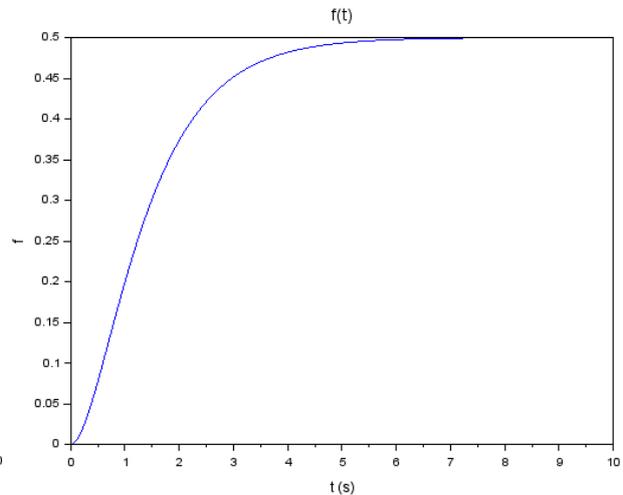
c- Cas où les racines sont complexes conjuguées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Im}(p_{\pm})} \sin(\text{Im}(p_{\pm})t) e^{\text{Re}(p_{\pm})t} = 0$$

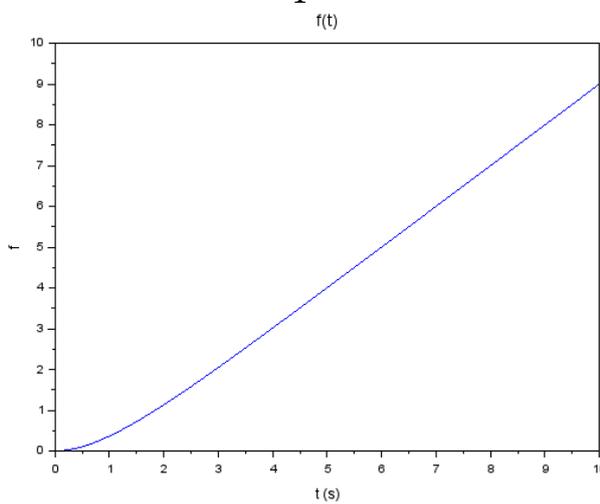
8- On présente plusieurs évolutions temporelles de notre paramètre d'état pour une entrée en échelon. Dites pour chaque cas si les pôles sont réels ou complexes, et s'ils ont une partie réelle négative.



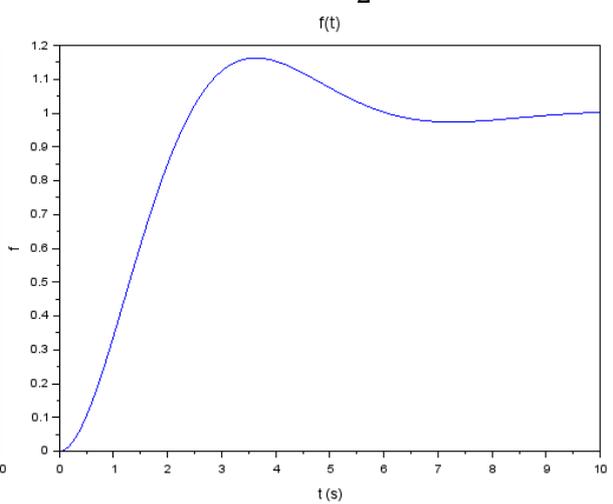
1



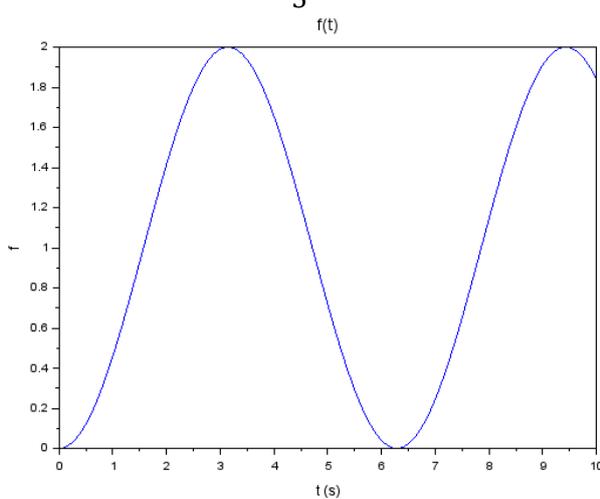
2



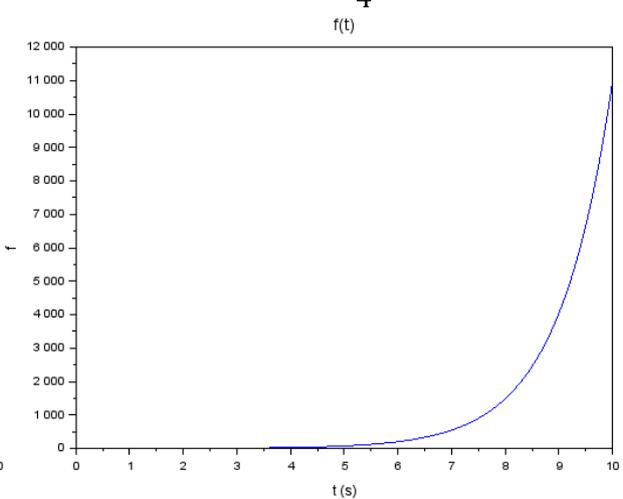
3



4



5



6

La présence d'oscillations signifie que les pôles sont complexes conjugués, sinon ils sont réels.
La divergence dénote la présence d'au moins un pôle à partie réelle positive.

Ainsi :

Le système 1 contient deux racines complexes conjuguées à partie réelle positive.

Le système 2 contient deux racines réelles à partie réelle négative.

Le système 3 contient deux racines réelles, une à partie réelle négative, l'autre nulle (cf remarque).

Le système 4 contient deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative.

Le système 5 contient deux racines complexes conjuguées à partie réelle nulle.

Le système 6 contient deux racines réelles, dont au moins une à partie réelle positive.

Remarque :

Le graphe 3 contient un pôle nul.

La fonction de transfert s'écrit :

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + p}$$

Il correspond à un système dont le paramètre d'état répond à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} = g(t)$$

Il n'y a donc pas de terme de rappel (proportionnel à $f(t)$ dans la partie gauche de l'équation). Le système, soumis à une entrée de type échelon ne peut que s'éloigner de sa position initiale à une certaine vitesse fixée, entre-autre, par le coefficient d'amortissement (coefficient du terme proportionnel à $\frac{df(t)}{dt}$ dans la partie gauche de l'équation).

Mathématiquement, la réponse à un échelon d'amplitude K s'écrit :

$$F(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{p^2 + p} = \frac{K}{p^2} \cdot \frac{1}{p + 1} = K(t - 1 + e^{-t})$$

Exercice 4 – Diagramme de Bode

Tracer grossièrement le diagramme de Bode des fonctions de transfert suivantes :

1- $F(p) = K$ avec K une constante positive

Le diagramme de Bode est formé d'un graphe en gain :

$$G_{dB} = 20 \log(|F(p)|)$$

Et en phase :

$$\varphi_0 = \arg(F(p))$$

On a ici :

$$|F(p)| = K$$

Donc :

$$G_{dB} = 20 \log(K)$$

Et :

$$\varphi_0 = 0^\circ$$

Le gain est constant sur toute la plage de pulsation. Le déphasage est nul. Dans ce cas, l'entrée est simplement proportionnelle à la sortie.

2- $F(p) = \frac{K}{p}$ avec K une constante positive

On a :

$$G_{dB} = 20 \log(|F(p)|)$$

Or $p = j\omega$ donc :

$$|F(p)| = \frac{K}{\omega}$$

Donc :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$$

Ainsi, lorsque la pulsation tend vers 0 on a :

$$G_{dB} \rightarrow +\infty$$

Remarque :

La fonction $\log(x)$ est nulle en $x = 1$, tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$, et vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

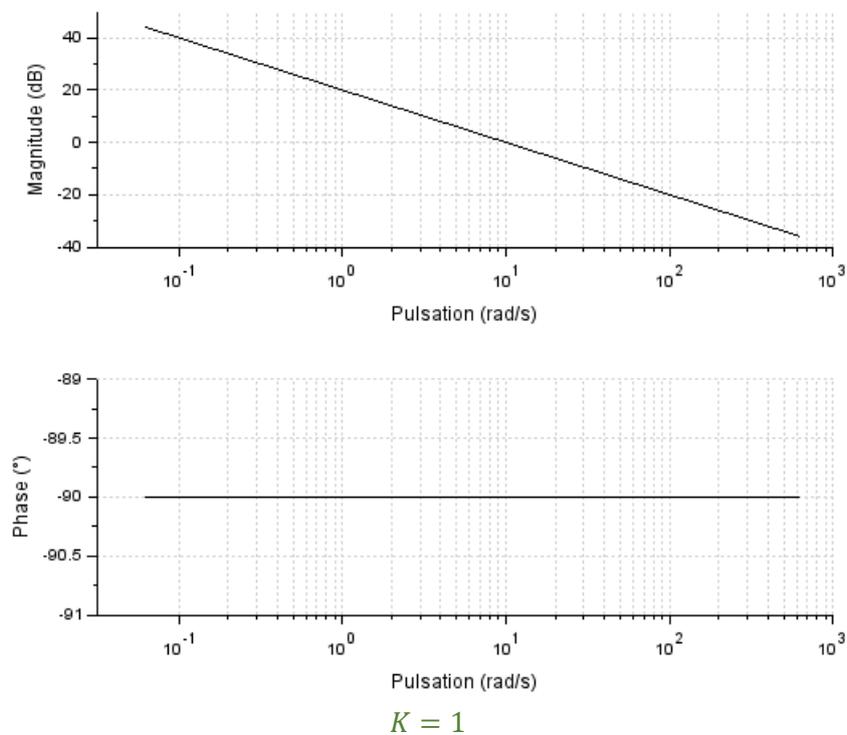
Et lorsque la pulsation tend vers l'infini on a :

$$G_{dB} = -20 \log(\omega)$$

$$G_{dB} \rightarrow -\infty$$

Et en phase :

$$\varphi_0 = \arg(F(p)) = \arg\left(\frac{K}{j\omega}\right) = \arg\left(-j\frac{K}{\omega}\right) = -90^\circ$$



On a une pente de -20 dB par décade sur toute la plage de pulsation, et un déphasage de -90° . Le gain passe l'axe des abscisses ($G_{dB} = 0$) lorsque $\omega = K$.

3- $F(p) = 1 + \tau p$ avec τ une constante

On a :

$$G_{dB} = 20 \log(|F(p)|) = 20 \log(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2})$$

Or :

$$\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$$

Et :

$$\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \tau\omega$$

Ainsi, lorsque la pulsation tend vers 0 on a :

$$G_{dB} \rightarrow 0$$

Et lorsque la pulsation tend vers l'infini on a :

$$G_{dB} = 20 \log(\tau\omega)$$
$$G_{dB} \rightarrow +\infty$$

L'intersection de ces deux asymptotes se fait lorsque $20 \log(\tau\omega) = 0$, soit à la pulsation que l'on dit de coupure $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Pour la phase :

$$\varphi^\circ = \arg(F(p)) = \arg(1 + j\tau\omega) = \arctan\left(\frac{\tau\omega}{1}\right)$$

Donc :

$$\varphi^\circ \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0^\circ$$

Et :

$$\varphi^\circ \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 90^\circ$$

On a le diagramme opposé à celui de la prochaine question.

Aux basses pulsations, la sortie répond proportionnellement à l'entrée, sans déphasage.

Aux hautes pulsations, la sortie amplifie « infiniment » le signal avec un déphasage de 90° . En pratique on comprend bien que ce genre de fonction n'est pas rencontrée.

On observe le changement de pente du gain de 0 à 20 dB par décade et de phase de 0 à 90° à la pulsation de coupure $\frac{1}{\tau}$.

4- $F(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ avec τ une constante

On a :

$$G_{dB} = 20\log(|F(p)|) = -20\log\left(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}\right)$$

Or :

$$\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$$

Et :

$$\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \tau\omega$$

Ainsi, lorsque la pulsation tend vers 0 on a :

$$G_{dB} \rightarrow 0$$

Et lorsque la pulsation tend vers l'infini on a :

$$G_{dB} = -20\log(\tau\omega)$$

$$G_{dB} \rightarrow -\infty$$

Pour la phase :

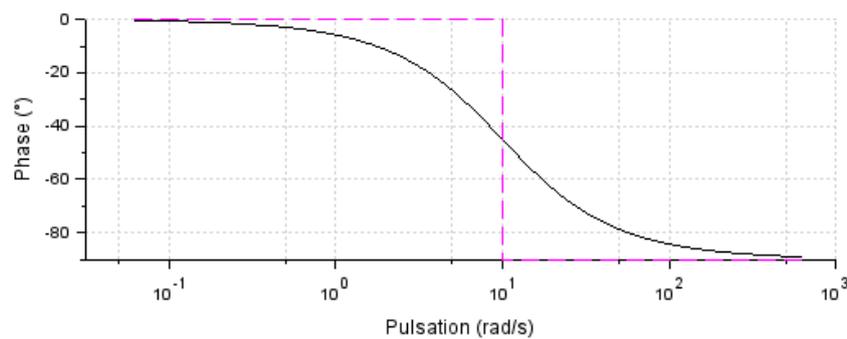
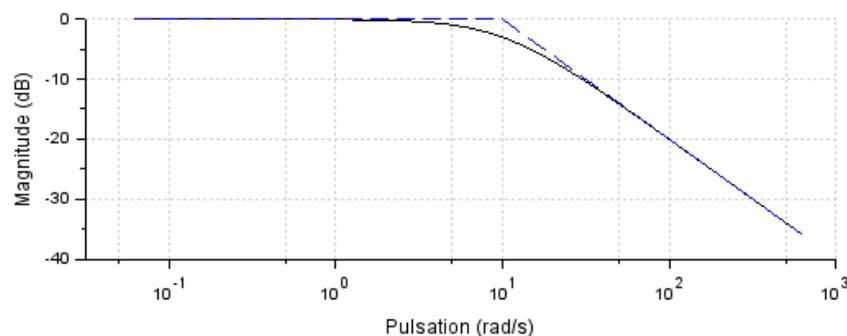
$$\varphi_0 = \arg(F(p)) = -\arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan\left(\frac{\tau\omega}{1}\right)$$

Donc :

$$\varphi_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0^\circ$$

Et :

$$\varphi_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -90^\circ$$



$$\tau = 0,1$$

Aux basses pulsations, la sortie répond proportionnellement à l'entrée, sans déphasage.

Aux hautes pulsations, la sortie ne répond quasiment plus.

On observe le changement de pente de 0 à -20 dB par décade et de phase de 0 à 90° à la pulsation de coupure $\frac{1}{\tau} = 10 \text{ rad. s}^{-1}$.

5- $F(p) = \frac{1}{(1+a\tau p)(1+b\tau p)}$ avec τ, a, b des constantes telles que $a > b$

On a :

$$G_{dB} = 20\log(|F(p)|) = -20\log(\sqrt{1 + (a\tau\omega)^2}) - 20\log(\sqrt{1 + (b\tau\omega)^2})$$

Or :

$$\sqrt{1 + (a\tau\omega)^2}, \sqrt{1 + (b\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$$

Et :

$$\sqrt{1 + (a\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} a\tau\omega \text{ et } \sqrt{1 + (b\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} b\tau\omega$$

Ainsi, lorsque la pulsation tend vers 0 on a :

$$G_{dB} \rightarrow 0$$

Et lorsque la pulsation tend vers l'infini on a :

$$G_{dB} = -20\log(a\tau\omega) - 20\log(b\tau\omega) = -20\log(ab\tau^2\omega^2) = -40\log(ab\tau^2\omega)$$

$$G_{dB} \rightarrow -\infty$$

Pour la phase :

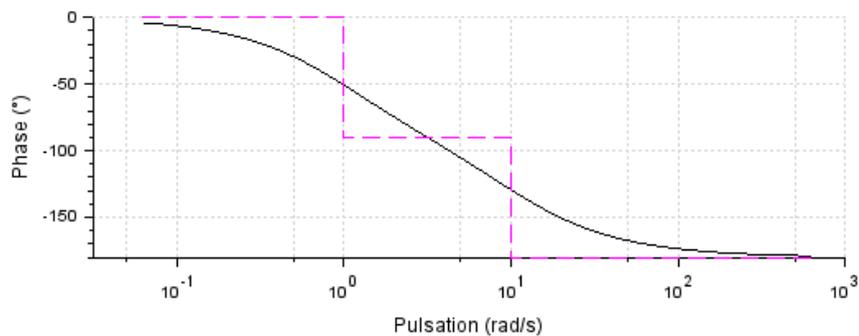
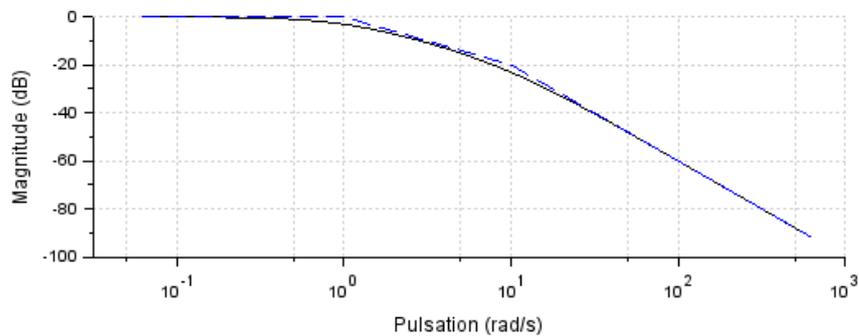
$$\varphi_0 = \arg(F(p)) = -\arg(1 + ja\tau\omega) - \arg(1 + jb\tau\omega) = -\arctan\left(\frac{a\tau\omega}{1}\right) - \arctan\left(\frac{b\tau\omega}{1}\right)$$

Donc :

$$\varphi_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0^\circ$$

Et :

$$\varphi_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -180^\circ$$



$$\tau = 0,1 ; a = 10 ; b = 1$$

Le déphasage augmente progressivement avec la pulsation du signal d'entrée.

A chaque pulsation de coupure $\frac{1}{a\tau} = 1$ et $\frac{1}{b\tau} = 10$ on diminue la pente de 20 dB par décade, et le déphasage de 90°.

Si $a = b$, alors la pente passe directement de 0 à -40 dB par décade, et le déphasage de 0 à 180°.

6- $F(p) = \frac{1+b\tau p}{1+a\tau p}$ avec τ, a, b des constantes telles que $a > b$

On a :

$$G_{dB} = 20 \log(|F(p)|) = 20 \log(\sqrt{1 + (b\tau\omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (a\tau\omega)^2})$$

Or :

$$\sqrt{1 + (a\tau\omega)^2}, \sqrt{1 + (b\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$$

Et :

$$\sqrt{1 + (a\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} a\tau\omega \text{ et } \sqrt{1 + (b\tau\omega)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} b\tau\omega$$

Ainsi, lorsque la pulsation tend vers 0 on a :

$$G_{dB} \rightarrow 0$$

Et lorsque la pulsation tend vers l'infini on a :

$$G_{dB} \rightarrow 0$$

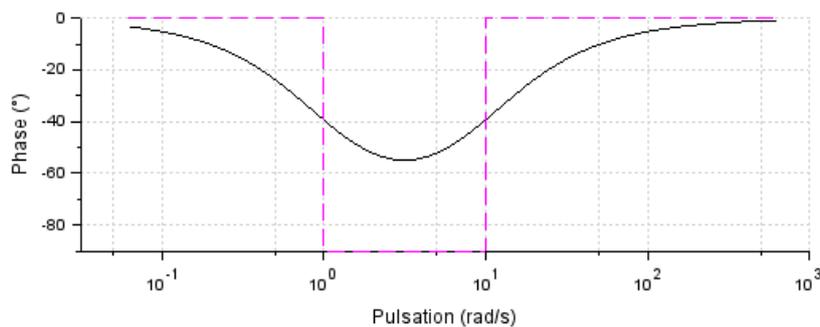
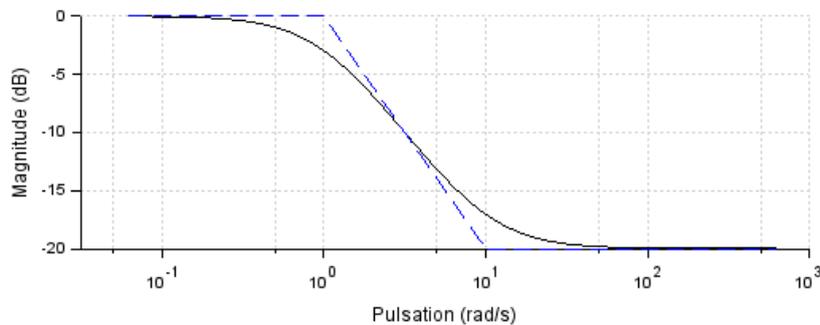
Pour la phase :

$$\varphi_0 = \arg(F(p)) = \arg(1 + jb\tau\omega) - \arg(1 + ja\tau\omega) = \arctan\left(\frac{b\tau\omega}{1}\right) - \arctan\left(\frac{a\tau\omega}{1}\right)$$

Donc :

$$\varphi_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0^\circ \text{ et } \varphi_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0^\circ$$

Pour tracer le diagramme de Bode, on réutilise ce que l'on a vu précédemment, à savoir l'addition des diagrammes des fonctions $1 + b\tau p$ et $\frac{1}{1+a\tau p}$:



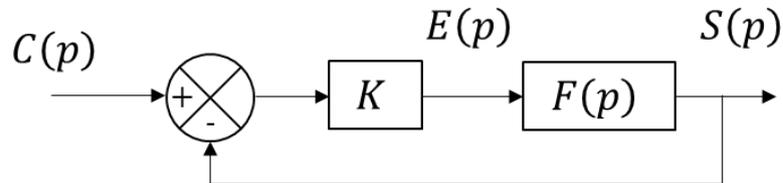
$$\tau = 0,1 ; a = 10 ; b = 1$$

Etant donné que $a\tau > b\tau$, c'est la pulsation de coupure $\frac{1}{a\tau}$ qui intervient en premier. D'où le fait que l'on ait d'abord une pente de -20 dB par décade, et un déphasage de -90° . Ensuite on a la pulsation de coupure $\frac{1}{b\tau}$ qui remet la pente et le déphasage à 0.

Exercice 5 – Lieu des racines (Evans)

On part d'une fonction de transfert $F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ représentant un système dont l'entrée est $E(p)$ et la sortie $S(p)$.

On souhaite l'asservir en rebouclant grâce à un gain K :



La fonction $C(p)$ représente une consigne que la sortie du système doit suivre.

On a plusieurs fonctions de transfert :

$$F_1(p) = \frac{1}{(1+p)(1+0,1p)}$$

$$F_2(p) = \frac{1}{1+p}$$

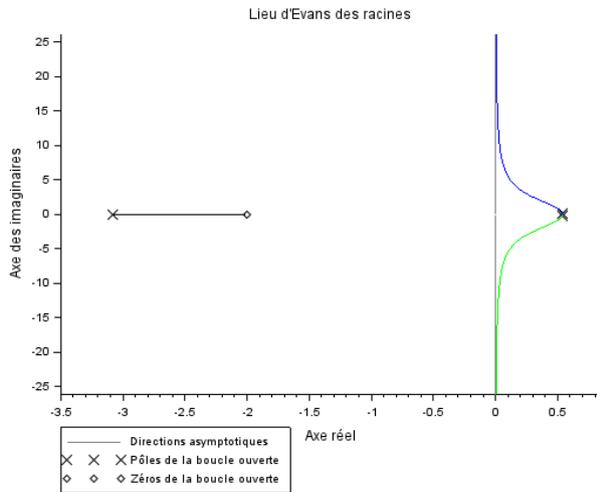
$$F_3(p) = \frac{1+0,1p}{1+p}$$

$$F_4(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

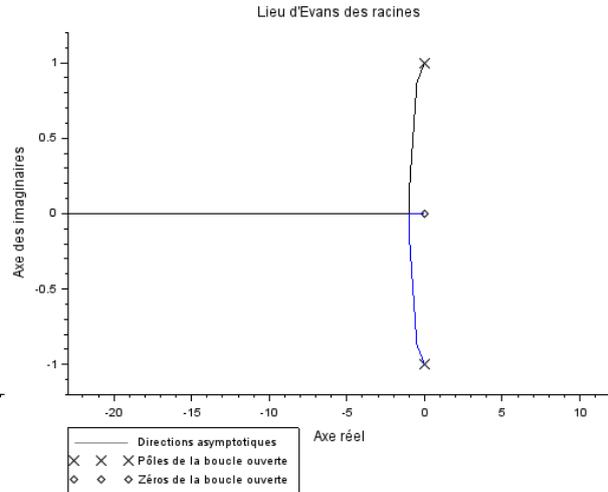
$$F_5(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$$

$$F_6(p) = \frac{1+0,5p}{p^3+2p^2-3p+1}$$

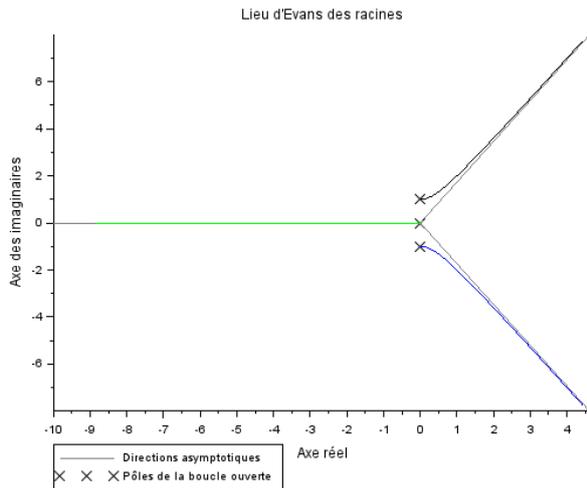
Associer ces fonctions à leur lieu des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée en fonction de la valeur du gain K (de 0 -FTBO- à l'infini) :



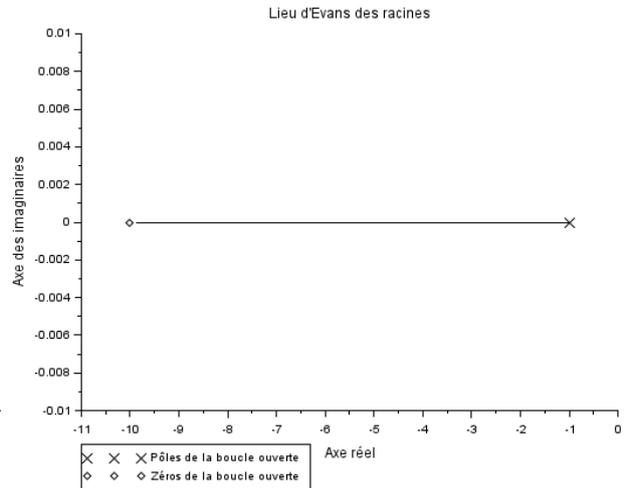
1



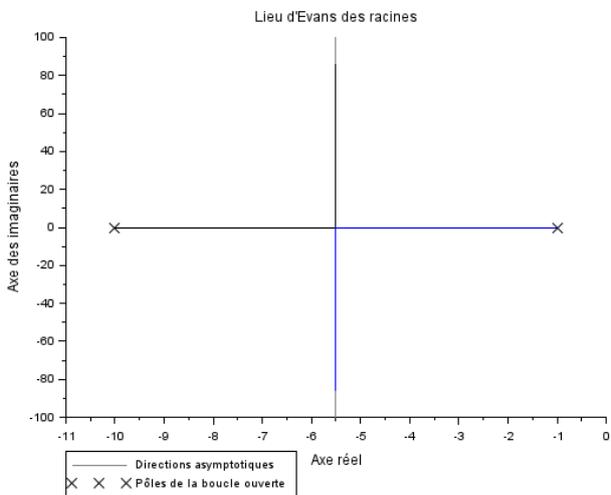
2



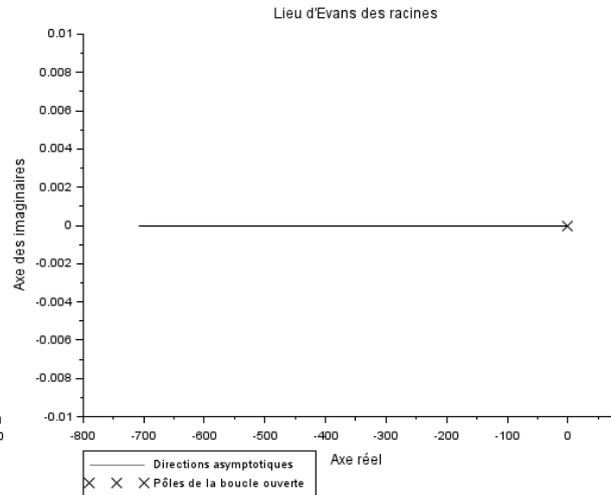
3



4



5



6

Tout d'abord, notons que l'on a la FTBO qui s'écrit :

$$FTBO = KF$$

Et la FTBF :

$$FTBF = \frac{KF}{1 + KF}$$

On appelle « zéros » les racines du numérateur d'une fonction de transfert, et « pôles » les racines du dénominateur.

Les zéros et les pôles de la FTBO sont ceux de F .

En écrivant la fonction sous forme de polynômes :

$$F = \frac{N}{D}$$

On a :

$$FTBF = \frac{KN}{D + KN}$$

Les zéros de la FTBF sont ceux de F , tandis que ses pôles sont les racines de $D + KN$.

Si $K = 0$, les pôles de la FTBF sont ceux de la FTBO (en fait il s'agit du cas boucle ouverte...).

Si $K \rightarrow +\infty$, on a $D + KN \rightarrow KN$, donc les pôles de la FTBF tendent vers les zéros de la FTBO.

Les pôles de la FTBF partent des pôles de la FTBO, et se déplacent sur le lieu soit en rejoignant un zéro de la FTBO (ex : graphe 4), soit en partant « à l'infini » en suivant une asymptote (ex : 6).

Prenons la fonction :

$$F_1(p) = \frac{1}{(1+p)(1+0,1p)}$$

C'est la FTBO de notre schéma bloc (sans compter le gain K), elle a deux pôles -1 et -10 et pas de zéro.

Cela correspond au graphe 5. Avec l'augmentation du gain, on voit que les pôles de la FTBF vont devenir complexes conjuguées (apparition d'oscillations dans la réponse du système asservi). Ces oscillations resteront néanmoins stables puisque la partie réelle des racines sera toujours négative.

La fonction F_2 en boucle fermée est rattachée au 6^{ème} graphe. Le pôle tend vers moins l'infini.

L'ajout du gain permet de stabiliser le système, son temps de réponse à une sollicitation est diminué.

La fonction F_3 a un pôle -1 et un zéro -10 . Le pôle va donc rejoindre le zéro avec l'augmentation du gain en boucle fermée. C'est le 4^{ème} graphe. L'ajout du gain permet donc de stabiliser le système, son temps de réponse à une sollicitation est diminué.

La fonction F_4 a deux pôles complexes conjuguées $\pm i$ et un zéro 0 . Un des pôles va donc rejoindre le zéro, et l'autre tendre vers moins l'infini avec l'augmentation du gain en boucle fermée. C'est le 2^{ème} graphe. L'ajout du gain permet donc de réduire les oscillations et de stabiliser le système sauf pour le gain infini ou une racine est nulle (cas limite de stabilité).

La fonction F_5 est la même que F_4 sauf que le zéro 0 est passé du côté des deux pôles complexes conjugués $\pm i$. Le pôle nul tend vers moins l'infini mais les deux autres vont tendre vers l'infini. C'est le 3^{ème} graphe. L'ajout du gain va donc à la fois rendre les oscillations instables, mais également réduire leur période (augmentation de la pulsation).

On comprend grâce à ce schéma que l'ajout du pôle (fonction intégrateur) déstabilise plus le système que l'ajout d'un zéro (fonction intégrateur).

Enfin la fonction F_6 est la plus compliquée, elle possède 3 pôles que l'on ne peut calculer directement (simplement), et un zéro -2 . Par déduction c'est le graphe 1. On voit qu'il possède deux racines complexes conjuguées à partie réelle positive ($0,54 \pm 0,18i$) donc représente un système instable et oscillant. L'ajout du gain permet de stabiliser les oscillations mais diminue leur période.

Exercice 6 – Modification de la dynamique d'un système

On considère un système représenté par un paramètre d'état x , qui répond à une équation différentielle :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = f(t)$$

Avec f une fonction représentant l'excitation du système.

On considère les conditions initiales de toutes les fonctions nulles.

- 1- Montrer que les racines de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle sont : $r_{\pm} = -0,5 \pm 1,32i$. Le système est-il stable ?

On a l'équation caractéristique :

$$r^2 + r + 2 = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$

Ainsi les racines sont :

$$r_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = -0,5 \pm 1,32i$$

Le système est donc stable puisque les racines ont une partie réelle négative.

- 2- Déterminer la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$ sous forme factorisée en fonction de r_+ , r_- .

En passant l'équation différentielle dans le domaine de Laplace, on a :

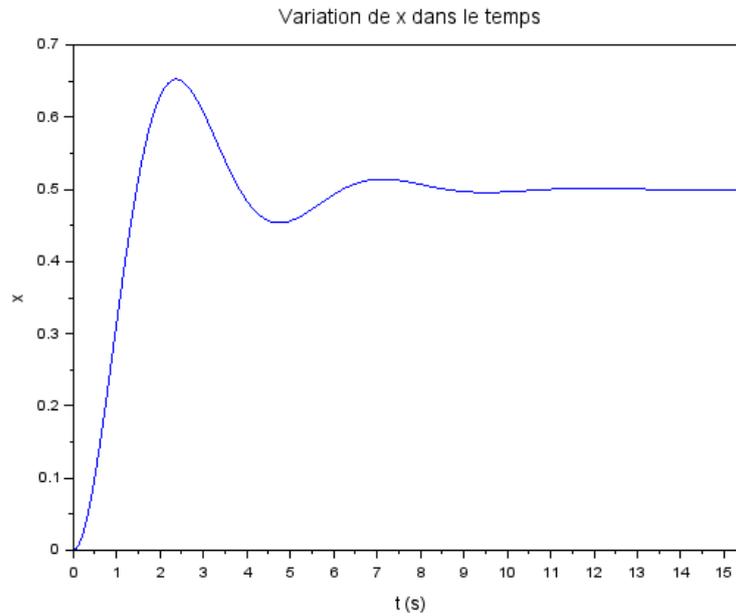
$$p^2X(p) + pX(p) + 2X(p) = F(p)$$

$$[p^2 + p + 2]X(p) = F(p)$$

Soit :

$$\frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{p^2 + p + 2} = \frac{1}{(p - r_+)(p - r_-)}$$

On applique un échelon $f(t) = 1$ en entrée de notre système, et l'on obtient la réponse $x(t)$:



3- Déterminer graphiquement la pulsation des oscillations. Remarque ? Déterminer leur amortissement (sans faire de calcul, ni utiliser le graphe ci-dessus).

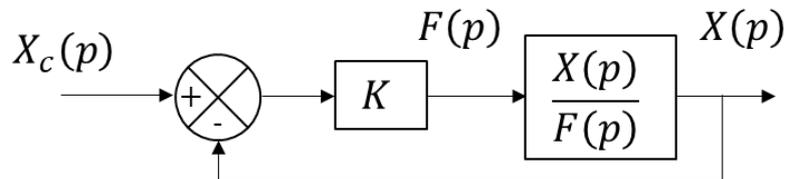
Graphiquement on a la période des oscillations qui vaut globalement $(4,75 - 2,4) \cdot 2 = 4,7$ s, soit une pulsation :

$$\omega_p = \frac{2\pi}{4,7} = 1,34 \text{ rad. s}^{-1}$$

Ce qui correspond à la partie imaginaire des racines de notre système.

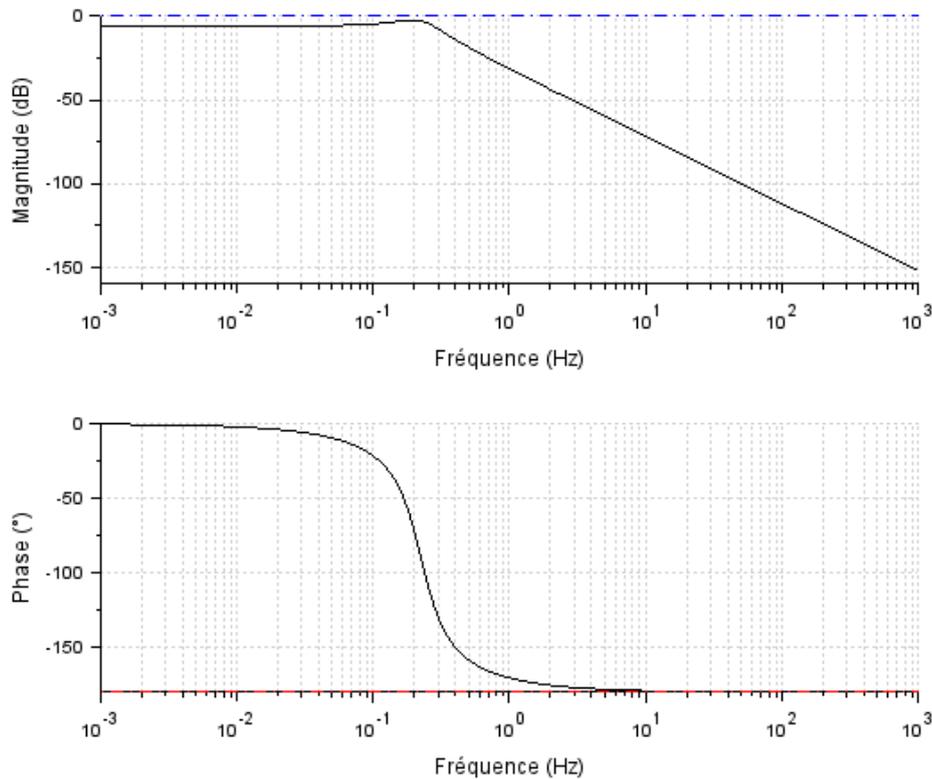
La partie réelle étant l'opposé de l'amortissement, soit $\xi\omega_n = 0,5 \text{ s}^{-1}$. Les oscillations sont relativement bien amorties.

On décide d'asservir le système sous la forme :



Avec un gain K .

On donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$:



4- Le système sera-t-il stable en boucle fermée ? Pour n'importe quelle valeur de gain K ?

On observe que les marges de gains et de phase sont infinies donc le système est stable, peu importe la valeur du gain K .

5- Décrire brièvement le principe de fonctionnement de ce schéma bloc.

On souhaite piloter le paramètre d'état de notre système grâce à une entrée consigne $X_c(p)$. Cette consigne est transformée en excitation pour le système sous la forme $F(p)$, ce qui va effectivement modifier la valeur du paramètre d'état $x(t)$.

Par comparaison à la valeur consigne, l'excitation est modifiée.

6- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

On a directement :

$$FTBO = K \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{K}{(p - r_+)(p - r_-)}$$

7- Montrer que l'on a l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$\frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K}{(p - r_+)(p - r_-) + K}$$

On a d'après le schéma bloc :

$$X(p) = K \frac{X(p)}{F(p)} [X_c(p) - X(p)]$$

$$X(p) = K \frac{X(p)}{F(p)} X_c(p) - K \frac{X(p)}{F(p)} X(p)$$

$$X(p) + K \frac{X(p)}{F(p)} X(p) = K \frac{X(p)}{F(p)} X_c(p)$$

$$X(p) \left[1 + K \frac{X(p)}{F(p)} \right] = K \frac{X(p)}{F(p)} X_c(p)$$

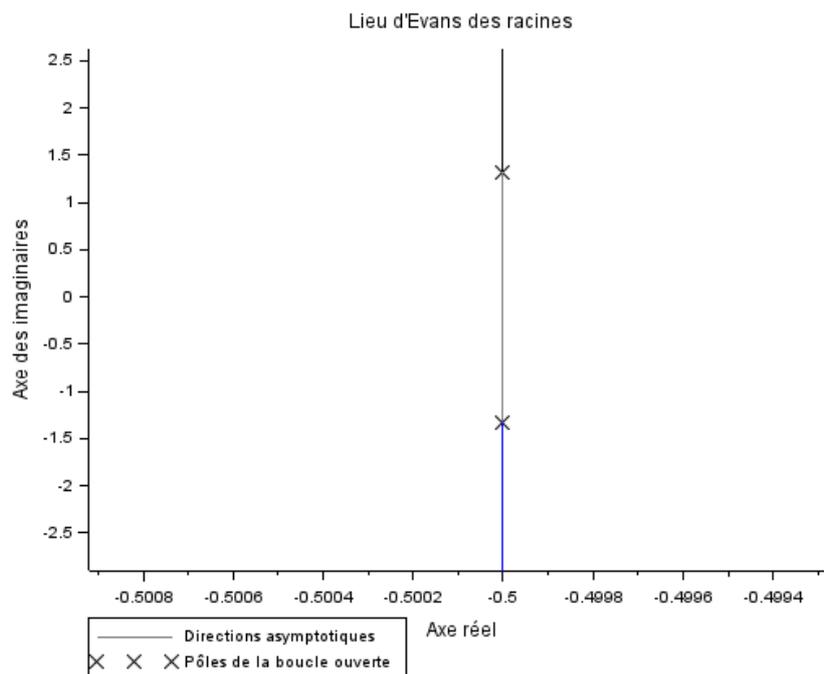
$$\frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K \frac{X(p)}{F(p)}}{1 + K \frac{X(p)}{F(p)}}$$

C'est la fameuse formule de Black.

Puis on écrit :

$$\frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K \frac{1}{(p - r_+)(p - r_-)}}{1 + K \frac{1}{(p - r_+)(p - r_-)}} = \frac{K}{(p - r_+)(p - r_-) + K}$$

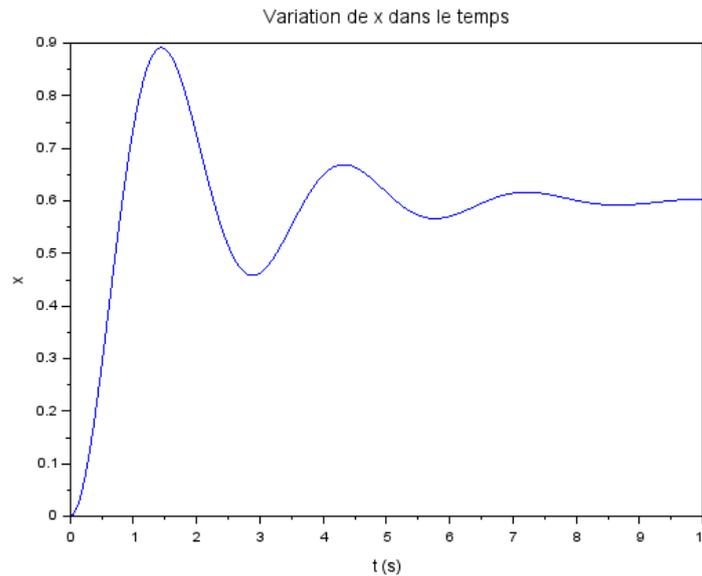
On trace le lieu des pôles de la FTBF en fonction de la valeur du gain K (de 0 -sans retour et sans le bloc K - à l'infini) :



8- Que se passe-t-il si l'on augmente le gain fortement ?

On note que les pôles de la FTBF vont voir uniquement leur partie imaginaire varier. Ce qui signifie que l'amortissement des oscillations reste le même, mais la pulsation augmente.

La réponse à un échelon devient par exemple (pour une valeur de gain $K = 3$) :



9- Quel est l'avantage de ce gain, et par extension, des correcteurs ?

Ils modifient les pôles de la fonction de transfert $\frac{X(p)}{X_c(p)}$, donc la dynamique du système. Si ce dernier est trop lent ou oscillant ou pas assez précis, les correcteurs peuvent améliorer les caractéristiques de sa réponse à une sollicitation.

De manière générale, on utilise ce genre de correction pour faciliter le pilotage des avions (on modifie leur dynamique pour qu'il réponde de manière adaptée aux ordres du pilote).

Remarque 1 :

Pour rappel on peut écrire toute fonction sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{p - p_k}$$

Avec p_k les pôles de F (racines de D).

Le passage dans le domaine temporel donne alors :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n A_k e^{p_k t}$$

Qui est la réponse du système à une perturbation type impulsion. C'est également la réponse transitoire à tout type de perturbation. Les pôles de F reflètent donc la dynamique du système.

Remarque 2 :

On peut utiliser les corrections pour stabiliser un système, mais il ne faut pas oublier que si une FTBO a des pôles à partie réelle positive, les critères d'analyse de stabilité en boucle fermée associés au diagramme de Bode ne sont plus bons, il faut utiliser le critère de Nyquist.

Exercice 7 – Stabilisation d'un système

On considère un système représenté par la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 - p + 1}$$

1- Déterminer les pôles de la fonction. Le système est-il stable ?

On résout l'équation :

$$p^2 - p + 1 = 0$$

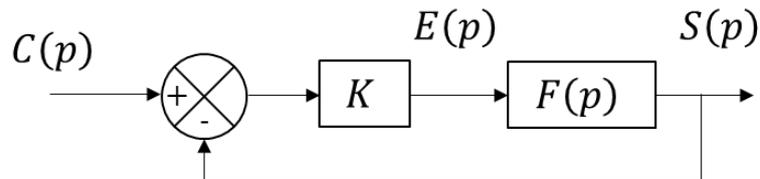
Dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$$p_{\pm} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = 0,5 \pm 0,87i$$

Le système est donc instable puisqu'ayant des pôles à partie réelle positive. Etant donné que ces racines sont complexes conjuguées, ce sont des oscillations divergentes qui apparaissent si l'on sollicite ce système.

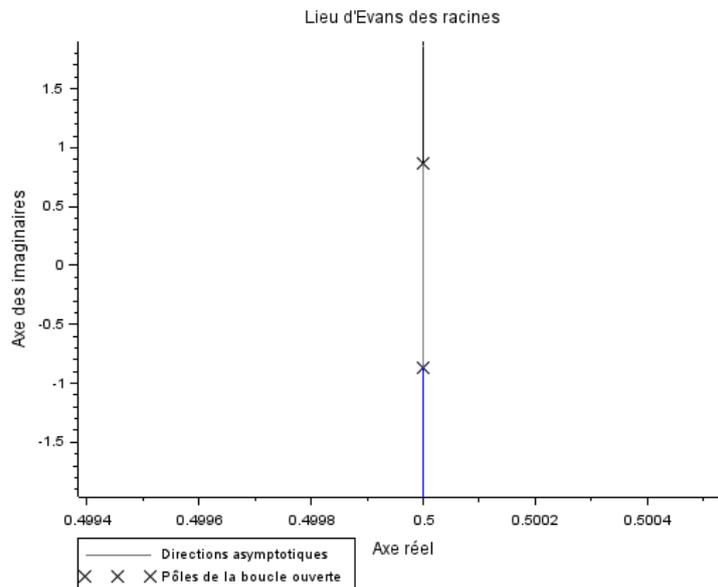
On souhaite asservir le système afin de le stabiliser :



2- Est-ce qu'à priori cela peut stabiliser le système ?

La fonction de transfert $F(p)$ a deux pôles mais aucun zéro. Avec l'augmentation de K , les pôles de la FTBF vont partir « à l'infini » sans changement d'amortissement.

On a :



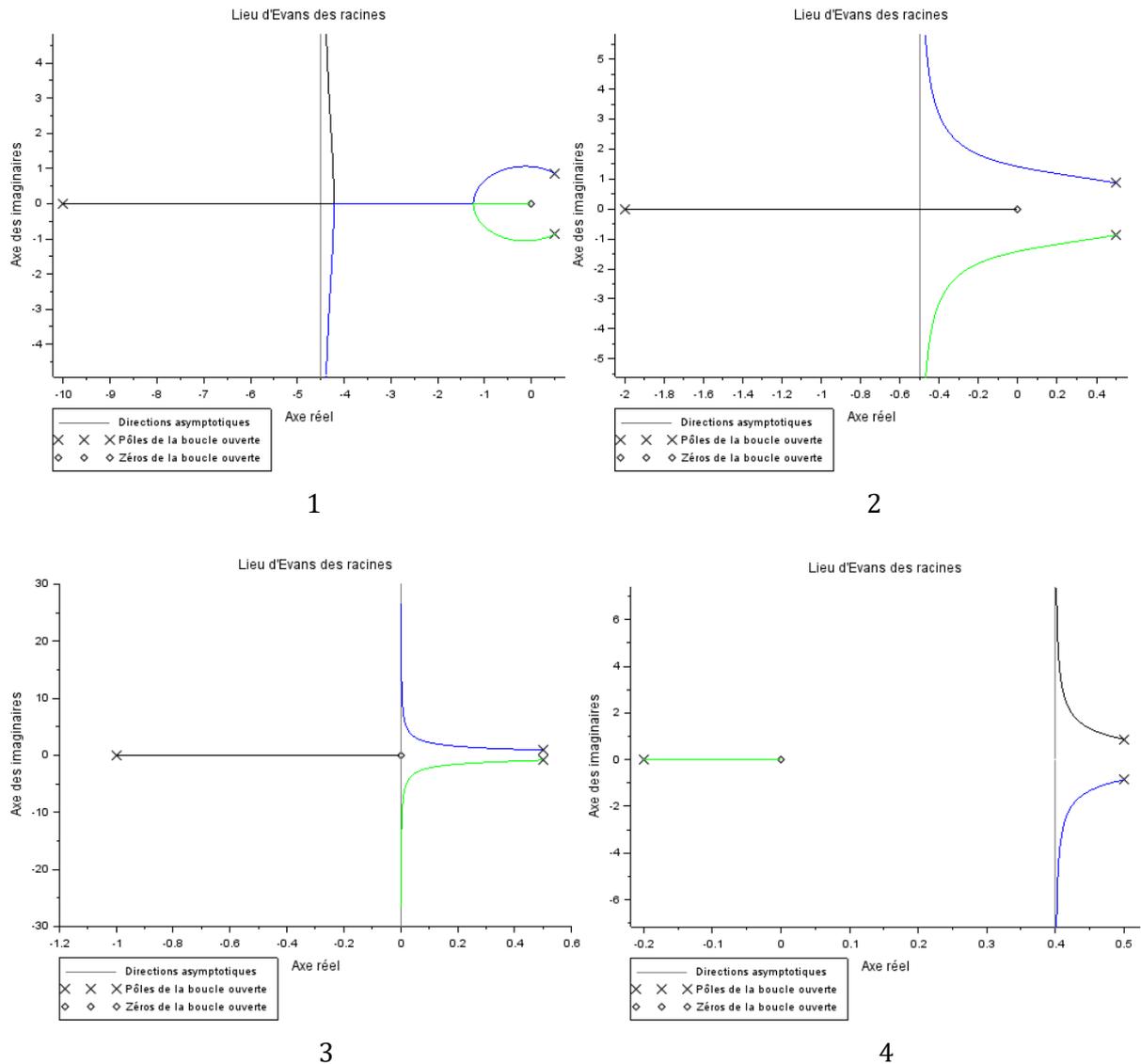
3- Que faut-il faire pour stabiliser le système ?

On l'a vu dans l'exercice sur le lieu des racines, il vaut mieux ajouter un correcteur de type dérivateur.

On modifie le correcteur en mettant :

$$K \rightarrow \frac{Kp}{1 + \tau p}$$

On trace le lieu des racines pour différentes valeurs de τ (0,1 ; 0,5 ; 1 ; 5) :

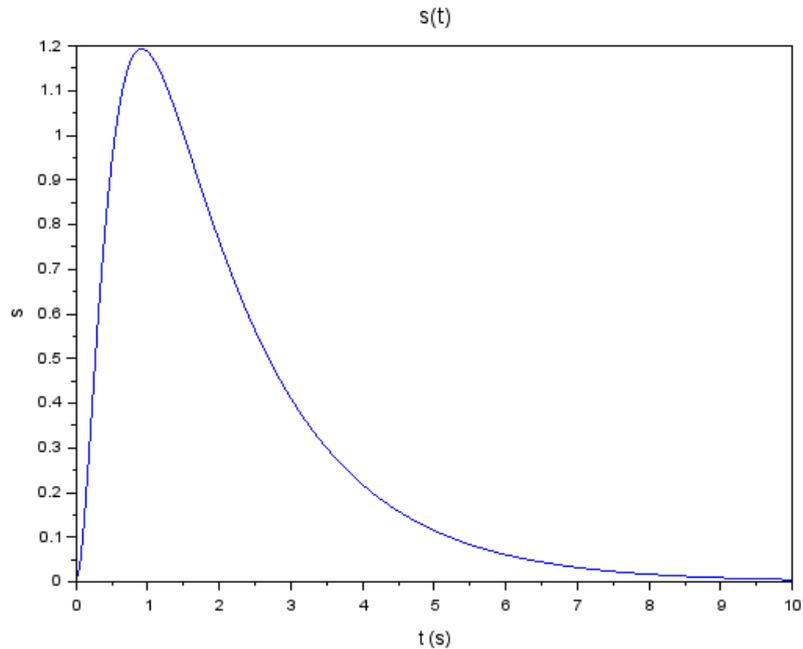


4- Commentaires ?

Le correcteur ajoute un pôle $-\frac{1}{\tau}$ ($-10 ; -2 ; -1 ; -0,2$) et un zéro 0. On a toujours les pôles de la fonction $F(p)$, à savoir $0,5 \pm 0,87i$.

Le fait que le pôle ajouté par le correcteur soit loin de l'axe des ordonnées permet de gagner en stabilité en « attirant » les autres racines vers le côté stable.

5- Retrouver le τ choisi en observant la réponse temporelle de notre système soumis à un échelon :



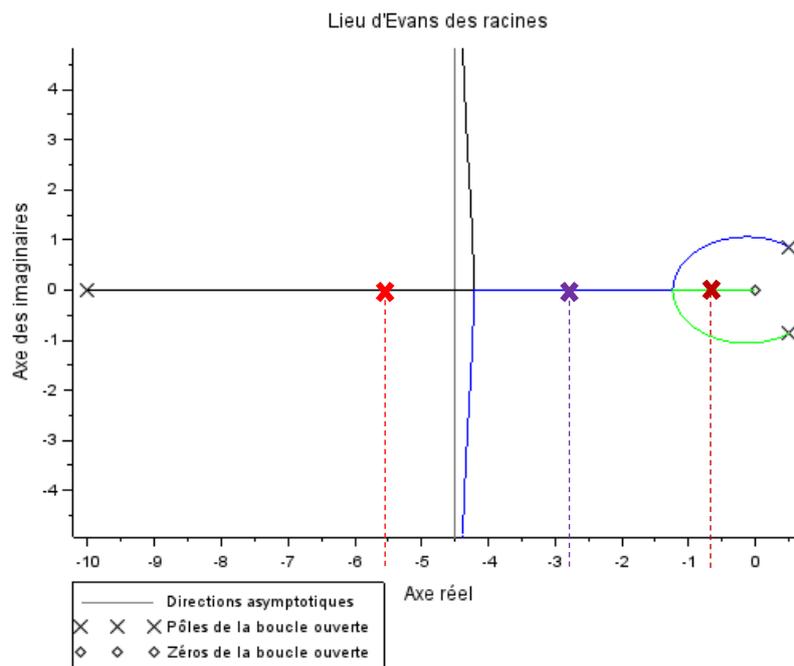
On observe qu'il n'y a pas d'oscillations. Il s'agit d'une somme d'exponentielles avec des temps caractéristiques assez faibles.

D'après les différents lieux des racines on note que seul le graphe 1 permet que les racines soient toutes réelles pour une plage de gains K .

C'est-à-dire que l'on a $\tau = 0,1$, et un gain K qui permet de se retrouver dans ce cas de figure.

Remarque :

On a dans ce cas ($K = 3$) les racines qui valent $-5,53$; $-2,83$; $-0,64$.

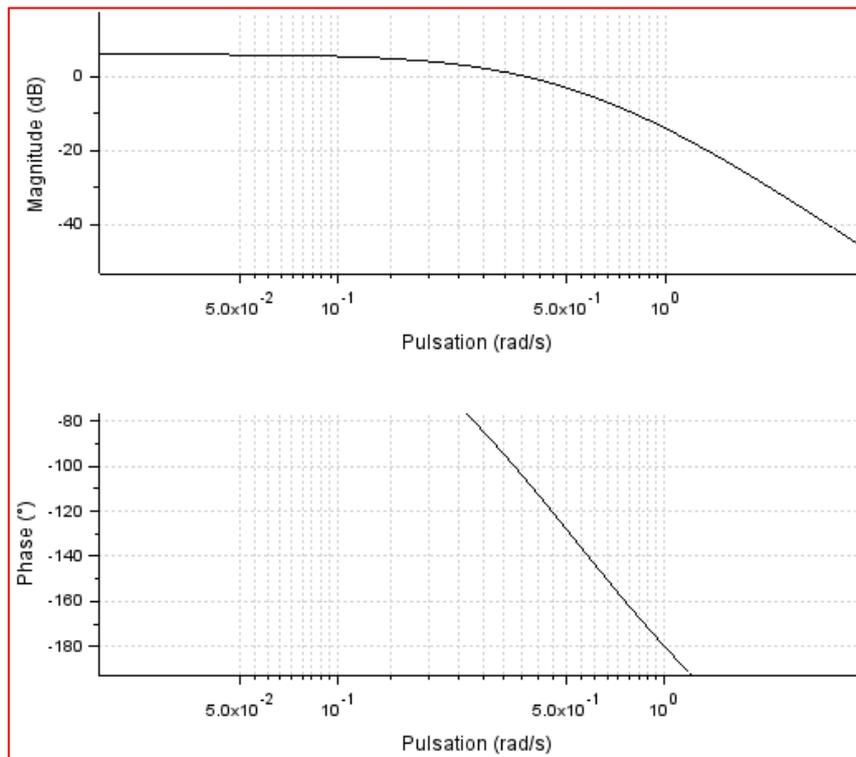
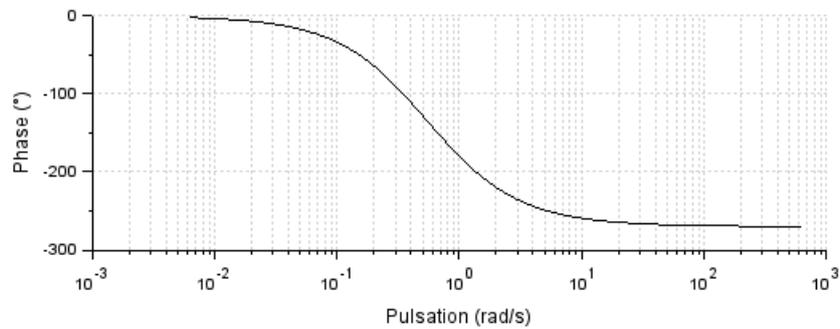
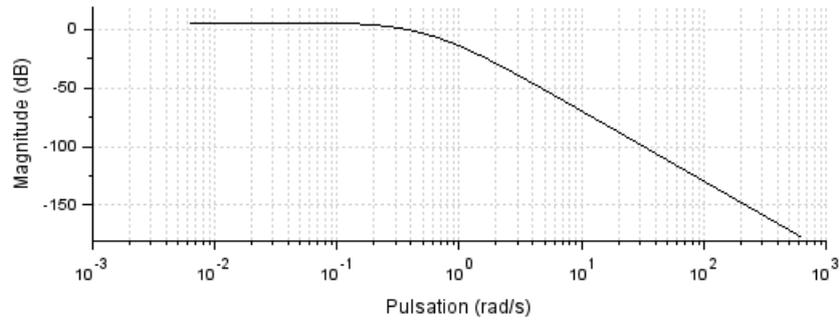


Exercice 8 – Diagramme de Bode et Nyquist (bonus)

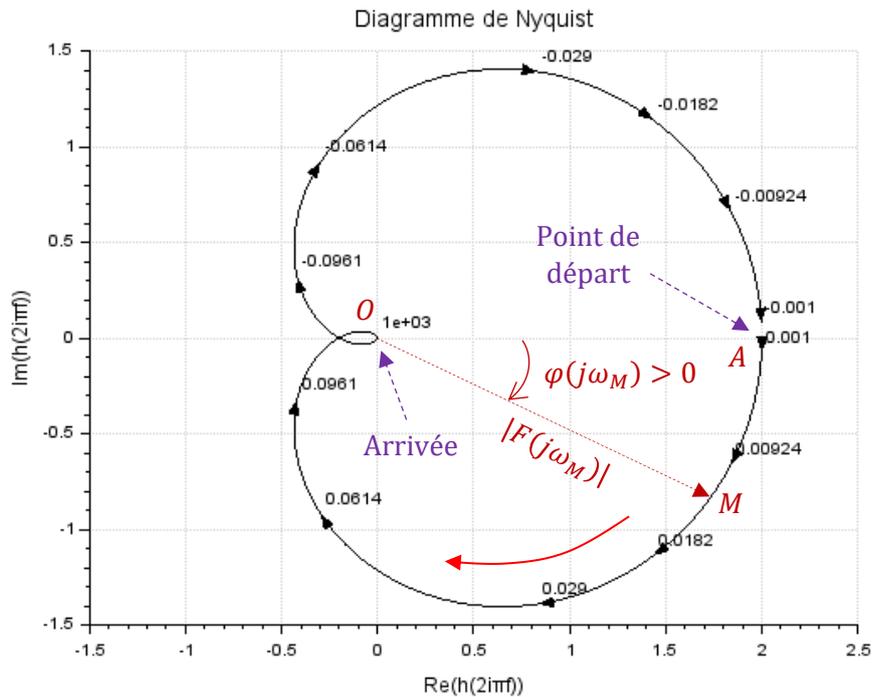
On considère une fonction de transfert de la forme :

$$F(p) = \frac{2}{(1+p)(1+2p)(1+3p)}$$

Dont on trace les diagrammes de Bode et de Nyquist :



Zoom du diagramme.



Pour information :

Le diagramme de Nyquist est équivalent au diagramme de Bode. Lorsque l'on part de la pulsation 0 rad. s^{-1} (les pulsations sont les nombres notés tout le long du contour), on se situe au point A de coordonnées (2 ; 0) qui correspond bien à la limite de gain donnée par le diagramme de Bode $G_{dB} = 20 \log(|F(p)|) = 6 \rightarrow |F(p)| = 10^{\frac{6}{20}} = 2$ et $\varphi_0 = 0^\circ$.

Ensuite plus la pulsation augmente, plus la phase diminue (on note bien sur le diagramme de Nyquist le départ du contour vers le bas) et le gain (fonction de la norme du vecteur \overline{OM}) reste à peu près constant au départ.

Aux hautes pulsations (sur le graphe il est marqué $1e + 03$), le gain diminue donc le point M se rapproche de l'origine et la phase atteint 270° (la tangente du contour lorsqu'il atteint l'origine O vient bien de la partie supérieure de l'axe des imaginaires purs).

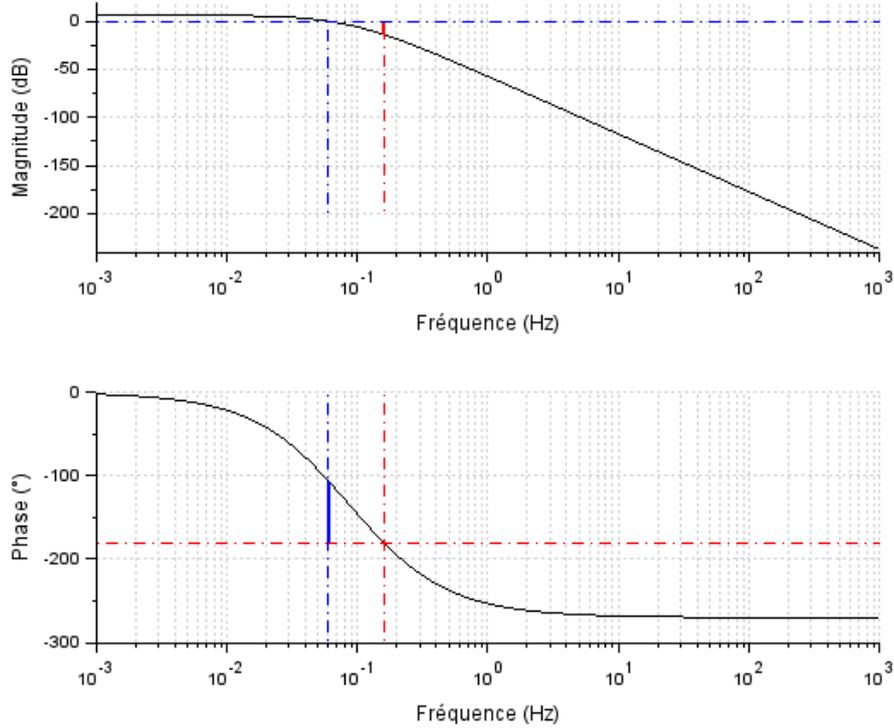
En plus du contour pour les pulsations positives, on a également le symétrique par rapport à l'axe des abscisses, pour les pulsations négatives.

1- La fonction a-t-elle des pôles à partie réelle positive ?

Les racines du dénominateur de la fonction sont : -1 ; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$.

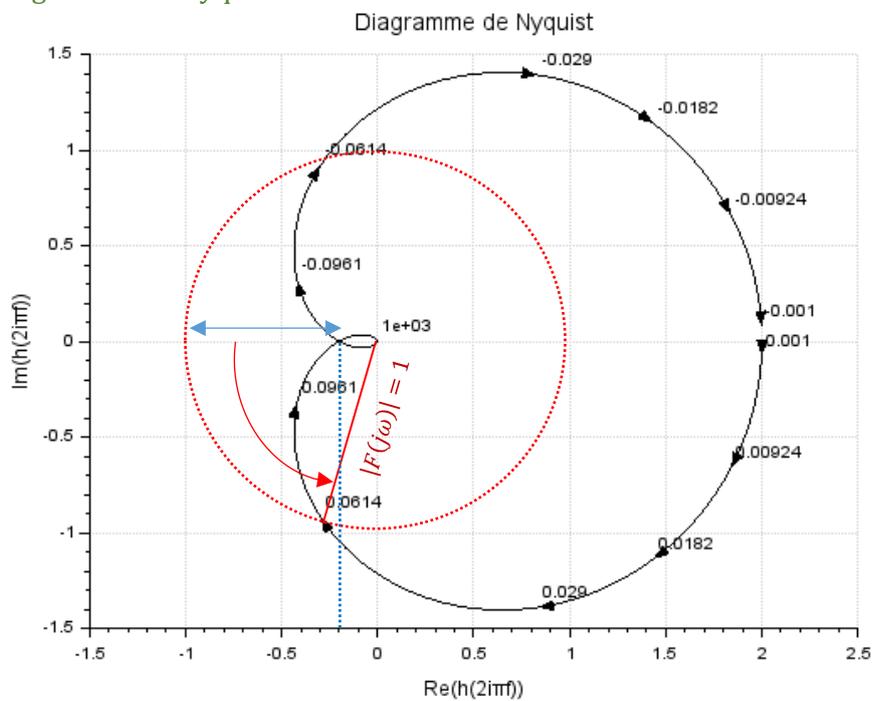
2- Retrouver les marges de gain et de phase sur les deux graphes.

En prenant le diagramme de Bode on a les marges :



On trouve environ une marge de gain de 14 dB et une marge de phase de 75°.

Et d'après le diagramme de Nyquist :



Lorsque l'on se situe sur l'axe des abscisses et à gauche de l'axe des ordonnées, la phase vaut -180° .

Le cercle rouge représente les points tels que : $|F(p)| = 1$.

La marge de gain est indiquée par la double-flèche bleue, et par définition on a :

$$M_G = 20\log(1) - 20\log(0,2) = 14 \text{ dB}$$

Et la marge de phase (différence de phase par rapport à -180° lorsque le gain vaut 0 dB ou $|F(p)| = 1$) est l'angle décrit par l'arc de cercle rouge et vaut environ $75^\circ (= -105^\circ - (-180^\circ))$.

On retrouve le critère du Revers, à savoir laisser le point critique $(-1 ; 0)$ à gauche lorsque l'on parcourt le contour suivant les pulsations croissantes.

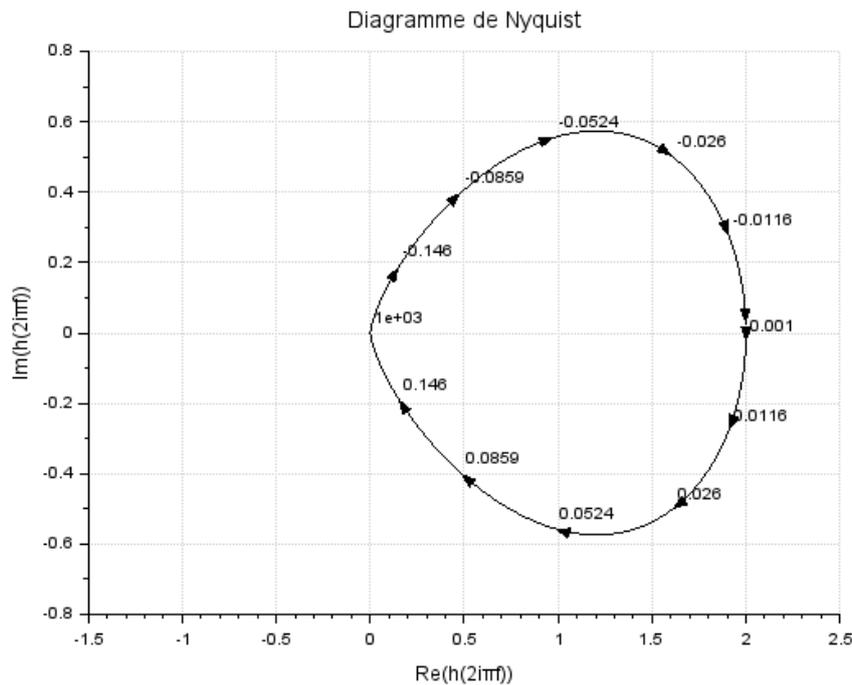
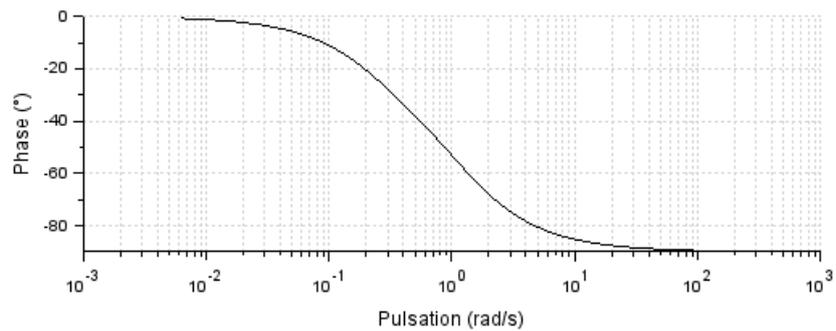
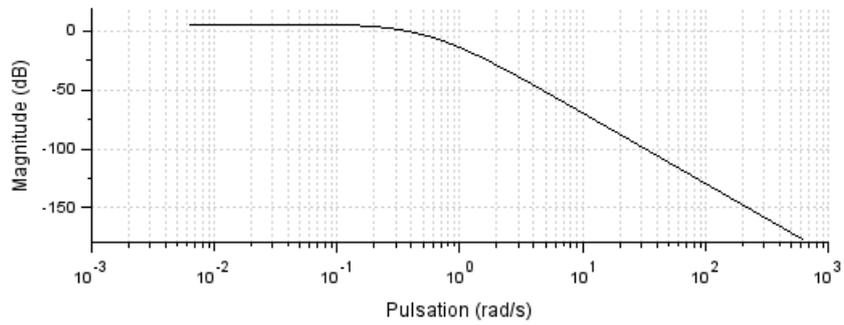
On trace désormais le diagramme de la fonction :

$$F(p) = \frac{2}{(1+p)(1-2p)(1+3p)}$$

3- La fonction a-t-elle des pôles à partie réelle positive ?

Par rapport à la première fonction, il apparait un pôle à partie réelle positive : $\frac{1}{2}$.

On a les diagrammes de Bode et de Nyquist :



4- Que se passe-t-il par rapport au cas précédent ?

On pourrait croire que le système est stable en boucle fermée (marge de gain infinie et marge de phase de plus de 90°), mais comme la fonction $F(p)$ (qui correspond à la FTBO si on ferme la boucle) possède un pôle à partie réelle positive, il faut que le contour de Nyquist entoure le point critique $(-1 ; 0)$ une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Le critère du Revers ne s'applique plus ici.

Exercice 9 – Conditions de stabilité (Bode, Evans, Nyquist)

On part de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 - 2p + 2}$$

1- Déterminer les pôles de la fonction.

On résout l'équation :

$$p^2 - 2p + 2 = 0$$

Dont le discriminant vaut :

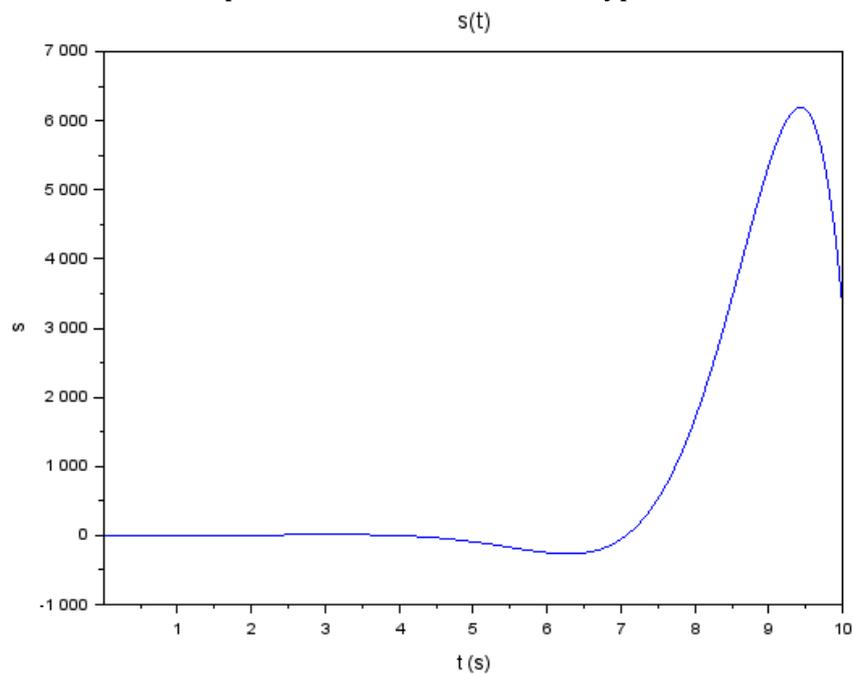
$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$p_{\pm} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i$$

Le système est donc instable puisqu'ayant des pôles à partie réelle positive.

Etant donné que ces racines sont complexes conjuguées, ce sont des oscillations divergentes qui apparaissent si l'on sollicite ce système.

On trace l'évolution dans le temps suite à une sollicitation de type échelon en entrée :



2- Retrouver grossièrement la valeur des pôles graphiquement.

Très grossièrement on lit la période des oscillations :

$$T_p = 2 \cdot (9,5 - 6,3) = 6,4 \text{ s}$$

Soit une pulsation :

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = 0,98 \approx 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Qui est la partie imaginaire des racines trouvées précédemment.

Et l'on peut donner l'expression de $s(t)$ sous la forme :

$$s(t) = ke^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_p t + \varphi)$$

On peut donc prendre deux points tels que $\sin(\omega_p t + \varphi) = \pm 1$.

Aux environs de $t = 9,5$ s on a :

$$s(t) = ke^{-\xi\omega_n \cdot 9,5} = 6200$$

Et aux environs de $t = 6,3$ s on a :

$$s(t) = -ke^{-\xi\omega_n \cdot 6,3} = -350$$

Donc :

$$\frac{ke^{-\xi\omega_n \cdot 9,5}}{ke^{-\xi\omega_n \cdot 6,3}} = \frac{6200}{-350}$$

$$e^{-\xi\omega_n \cdot (9,5-6,3)} = 20,67$$

$$e^{-\xi\omega_n \cdot 3,2} = 20,67$$

$$-\xi\omega_n \cdot 3,2 = \ln(20,67)$$

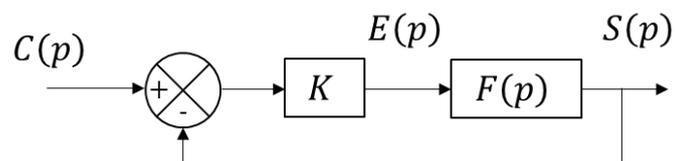
Et l'amortissement vaut donc :

$$\xi\omega_n = -0,95 \approx -1 \text{ s}^{-1}$$

Qui est la partie réelle des racines :

$$p_{\pm} = -\xi\omega_n \pm \omega_p i$$

Nous allons chercher à savoir si la fonction de transfert en boucle fermée est stable :



Où la fonction $C(p)$ représente une consigne que la sortie doit suivre.

On trace les diagrammes de la FTBO (on prend $K = 1$) :

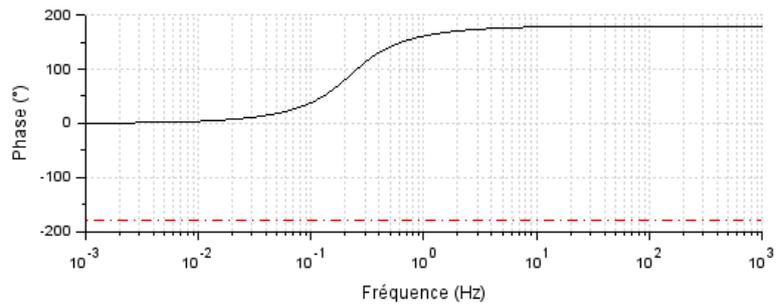
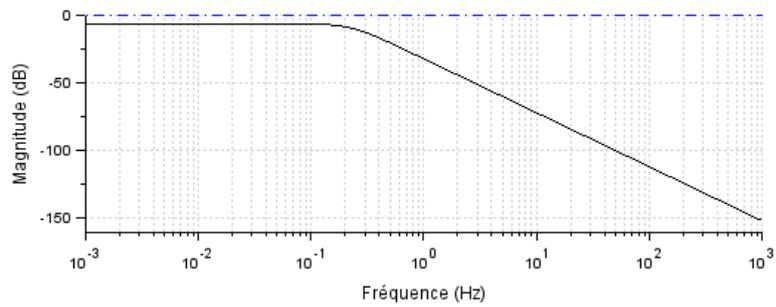
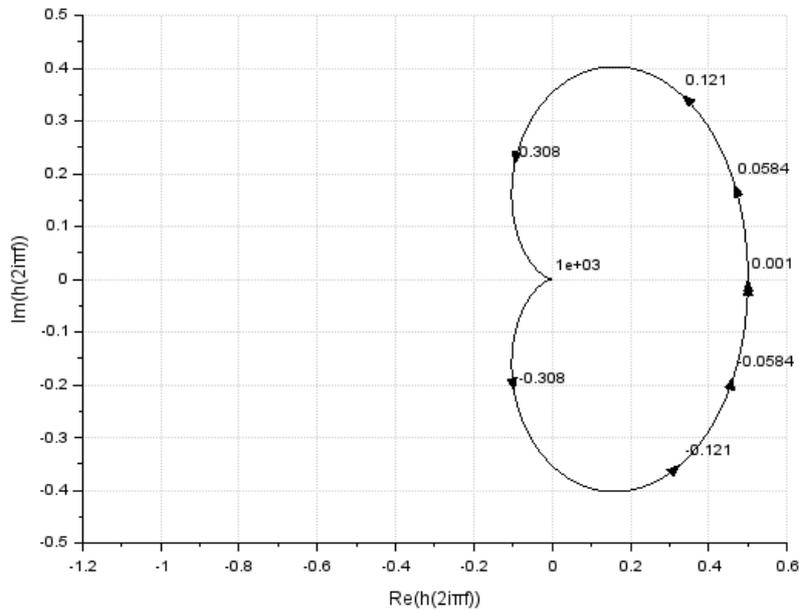


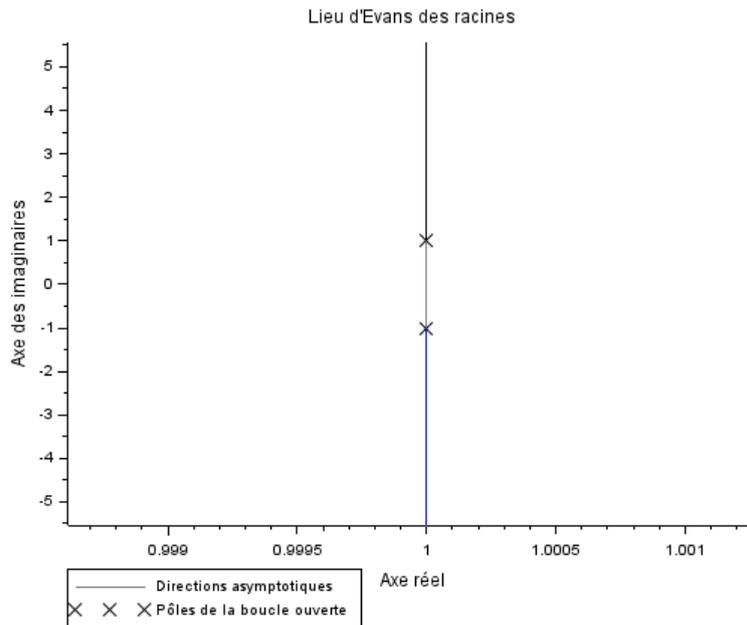
Diagramme de Nyquist



Lorsque l'on parcourt le contour de Nyquist en partant de $\omega = 0 \text{ rad. s}^{-1}$ (c'est-à-dire le point de coordonnées $(0,5 ; 0)$) on note que cela correspond bien au diagramme de Bode :

- Aux pulsations faibles $G_{dB} = 20 \log(|F(p)|) = -6 \text{ dB}$ et $\varphi_0 = 0^\circ \rightarrow Re = 10^{-\frac{6}{20}} = 0,5$ et $Im = 0$.
- Aux pulsations fortes $G_{dB} \rightarrow -\infty$ donc $Re \rightarrow 0$ et $\varphi_0 \rightarrow 180^\circ$ donc tangente horizontale.

En parcourant le sens des pulsations négatives on a le symétrique de ce contour par rapport à l'axe des abscisses.



3- Quelles informations peut-on tirer de ces graphes ?

L'étude des marges de gain et de phase sur les diagrammes est hors de propos ici puisque la FTBO possède des pôles à partie réelle positive. On ne peut pas appliquer le critère du Revers, le seul fait d'être le plus loin possible du point $(-1; 0)$ n'est pas suffisant, il faut que le contour de Nyquist l'entoure autant de fois que le nombre de pôles instables de la FTBO.

Le critère de Nyquist dans notre cas est énoncé de la façon suivante :

« Si la FTBO est instable, il doit y avoir un nombre de cycles autour du point $(-1; 0)$ (parcourus dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) égal au nombre de pôles à partie réelle positive de la FTBO ».

Ici, la FTBO a deux pôles à partie réelle positive, il faut donc deux cycles. Or on n'en voit aucun, la FTBF est instable.

Le lieu des racines nous permet de confirmer cela, et ce, pour toute valeur de gain K .

On corrige le système en remplaçant notre gain par :

$$K \rightarrow \frac{Kp}{1 + 0,1p}$$

4- Donner les pôles de la FTBO.

On écrit la FTBO :

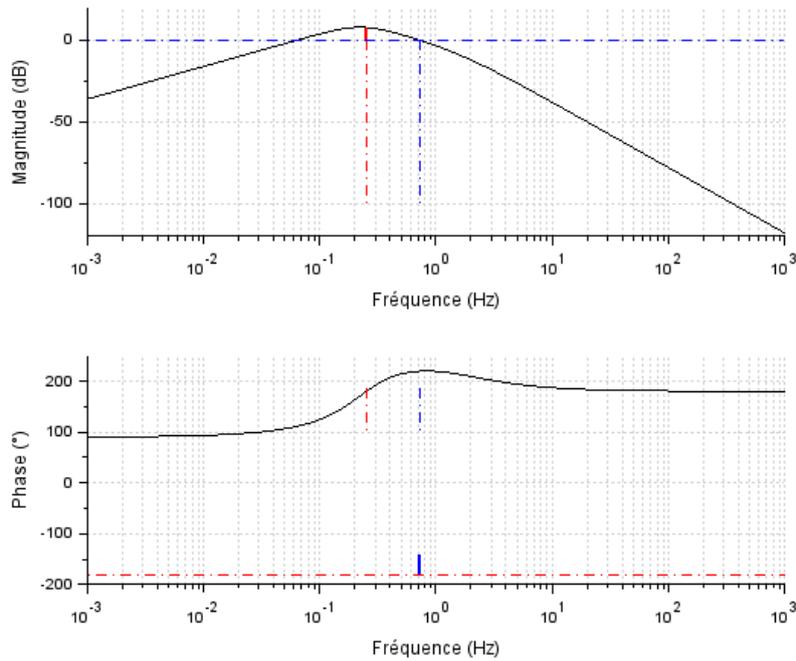
$$\frac{Kp}{1 + 0,1p} F(p) = \frac{Kp}{1 + 0,1p} \frac{1}{p^2 - 2p + 2}$$

Dont les pôles sont :

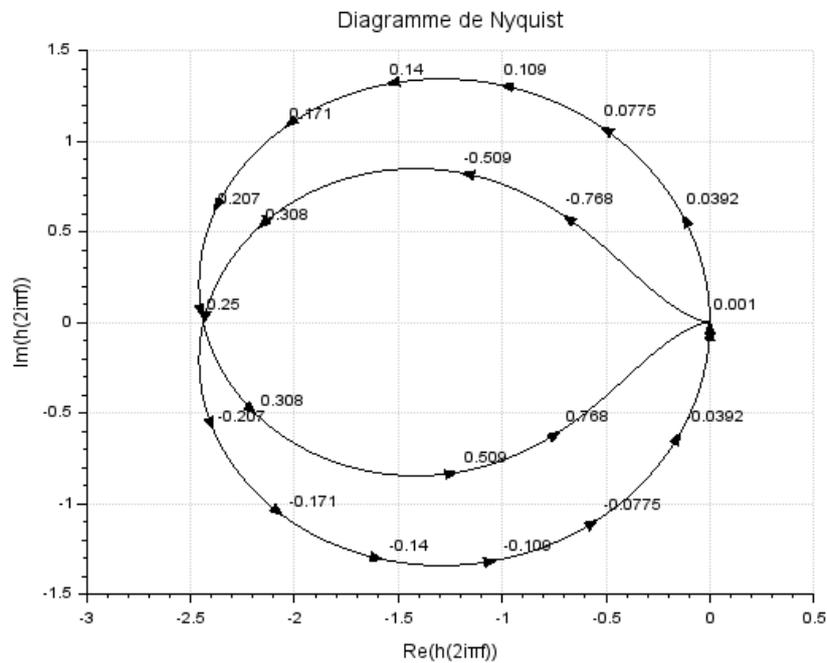
$$-10 ; 1 \pm i$$

On a donc un pôle supplémentaire qui correspond à celui du correcteur : -10 .

On trace les diagrammes de la FTBO (on prend $K = 5$ pour Bode et Nyquist) :

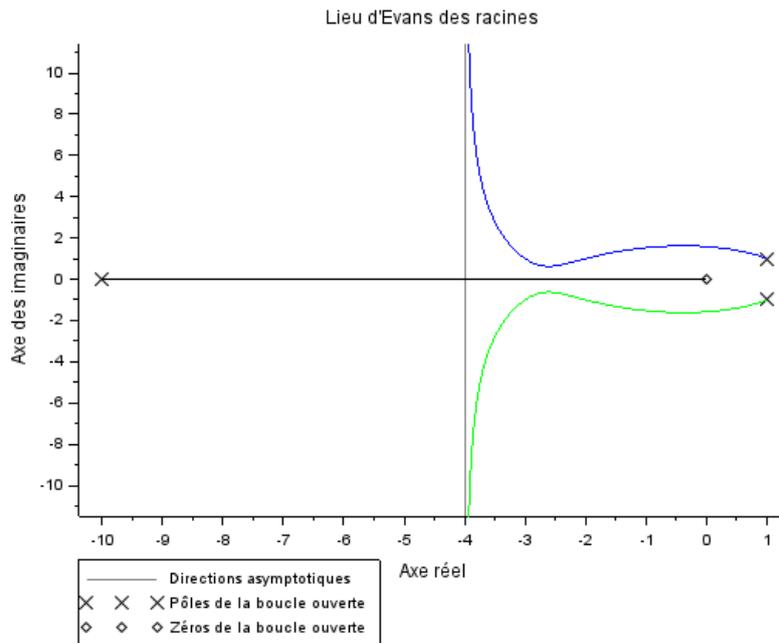


La marge de gain a été calculée à $-7,74$ dB et la marge de phase 40° .



En parcourant le contour en partant de $\omega = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ (c'est-à-dire le point de coordonnées $(0 ; 0)$) on retrouve le diagramme de Bode :

- Aux pulsations faibles $G_{dB} \rightarrow 0$ et $\varphi_0 = 90^\circ$ donc $Re \rightarrow 0$ et tangente verticale.
- Aux pulsations fortes $G_{dB} \rightarrow 0$ et $\varphi_0 = 180^\circ$ donc $Re \rightarrow 0$ et tangente horizontale.



K varie ici de 0 à l'infini.

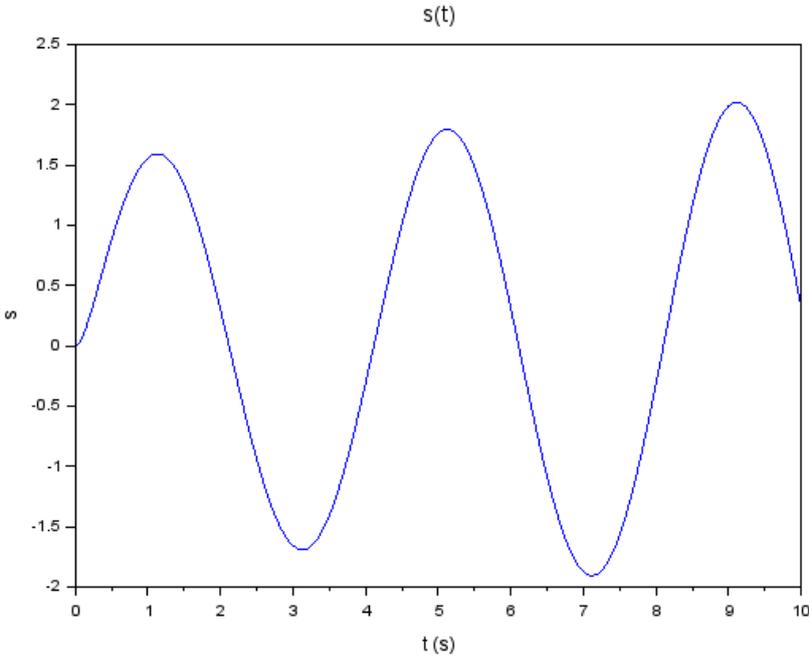
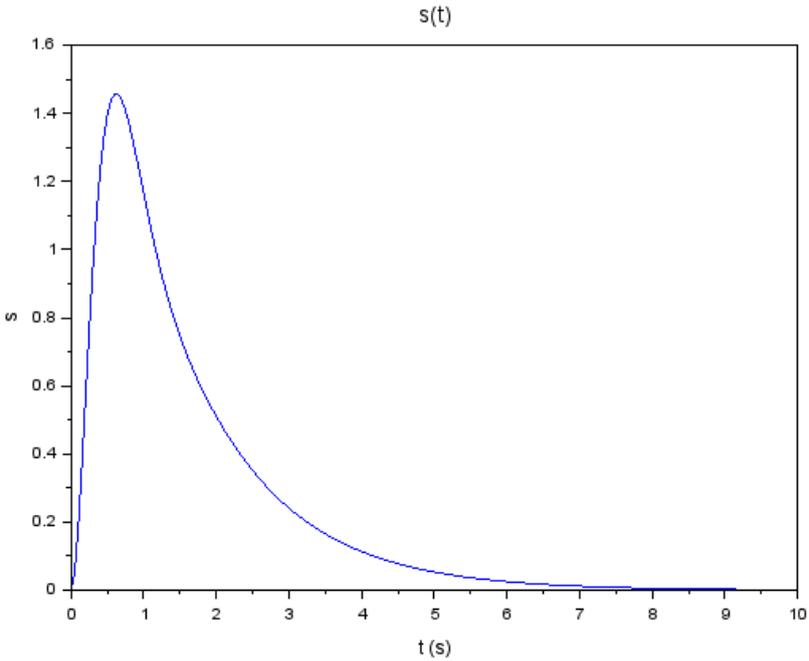
5- Quelles informations peut-on tirer de ces graphes ?

Aucune conclusion à tirer du diagramme de Bode puisque la FTBO possède des pôles à partie réelle positive. Attention donc puisque la marge de gain calculée est négative (qui correspond à $20\log(2,45)$ globalement = point du contour qui coupe l'axe des abscisses sur le diagramme de Nyquist), pourtant le système est stable en boucle fermée.

Le diagramme de Nyquist nous permet en revanche de dire que le système est stable en boucle fermée (deux cycles autour de -1 parcourus en sens inverse des aiguilles d'une montre – ce qui est en accord avec les deux pôles à partie réelle de la FBTO).

Le lieu des racines nous permet de confirmer cela, mais attention aux faibles valeurs de gain K , où les racines complexes conjuguées ont toujours une partie réelle positive.

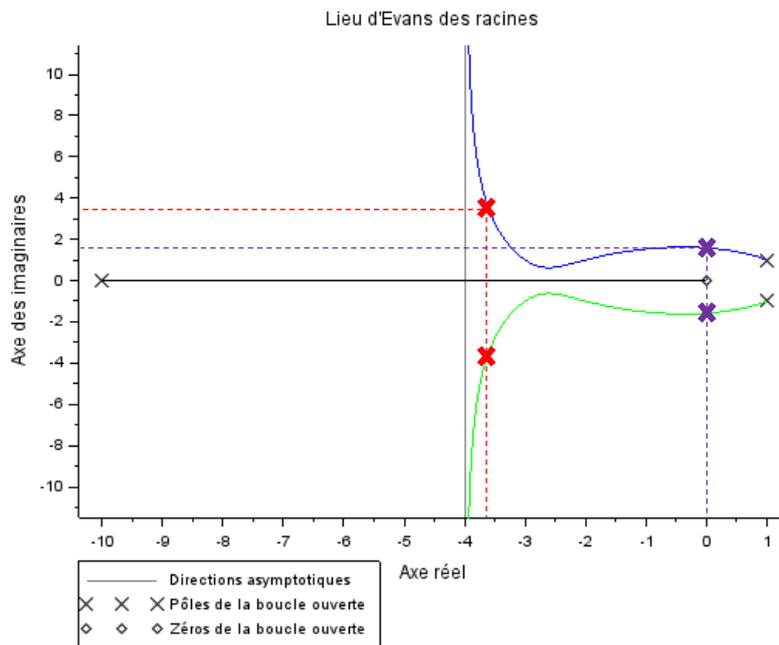
On donne la réponse à un échelon de notre système dans un cas où le gain K vaut 2 et l'autre 5 :



6- Quel graphe correspond au gain 2 ?

D'après le lieu des racines, plus le gain augmente, plus les racines ont des parties réelles négatives. Donc le gain 2 correspond au deuxième graphe.

On peut placer les points sur le lieu approximativement :



Puisque les pôles de la FTBF calculés sont :

-Pour le gain 2 :

$$-8,1 ; 0,03 \pm 1,57i$$

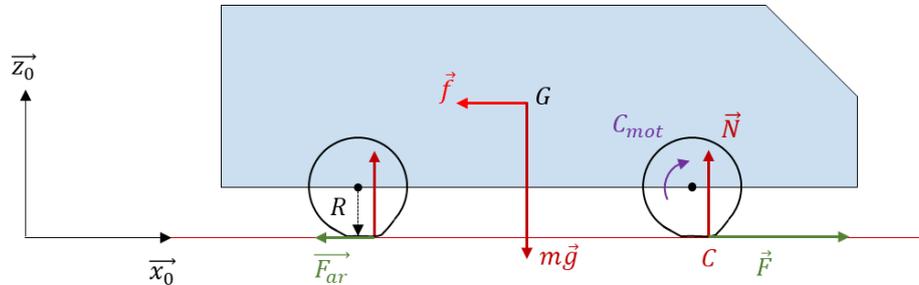
-Pour le gain 5 :

$$-0,75 ; -3,62 \pm 3,67i$$

Exercice concret

Exercice – Système de capture et maintien de la vitesse d'une voiture

On s'intéresse à une voiture de masse m , de type traction, et roulant en ligne droite sur une route :

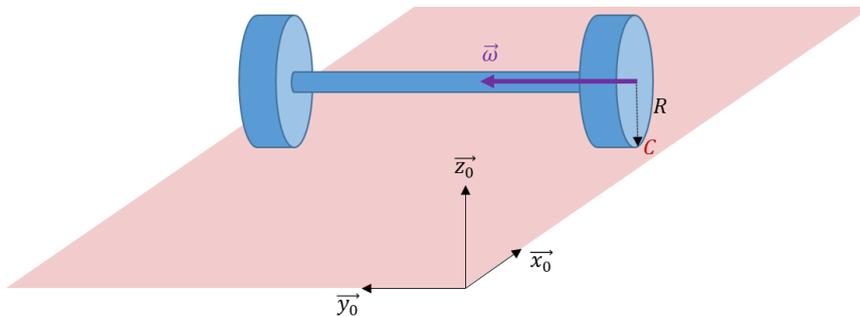


Le couple moteur C_{mot} (donc la force de traction $\vec{F} = F\vec{x}_0$) ne s'applique que sur les roues avant. Les pneus se déformant sur la route, la réaction du sol n'est pas appliquée en un point (C) situé sous le centre des roues mais légèrement en avant, laissant apparaître un moment dû à $\vec{N} = N\vec{y}_0$ par rapport au centre des roues qui tend à ralentir leur rotation (= frottement de roulement).

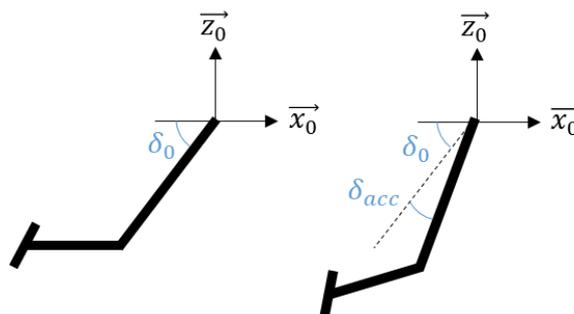
Pour des raisons de simplifications on omettra ce qu'il se passe sur l'essieu arrière.

On considère l'essieu avant comme un arbre tournant autour d'un axe fixe \vec{y}_0 , d'inertie I_{essieu} selon ce même axe, soumis à un couple moteur $C_{mot} > 0$ et de frottement (pris constant) $C_{frott} > 0$.

La vitesse de rotation de l'arbre est notée ω , le rayon d'une roue est noté R et la vitesse de la voiture V . On considèrera toujours que $V = R\omega$.



Le couple moteur C_{mot} dépend de la position de l'accélérateur que l'on prend ici sous la forme d'un angle δ_{acc} par rapport à l'angle de référence δ_0 (pédale relâchée) :



Le couple transmis à l'arbre permet de mettre en rotation les roues avant de la voiture, qui vont exercer une force $\vec{F}_{R/S}$ sur le sol. Par principe d'action-réaction, le sol exerce la force opposée sur les roues, ce qui fait avancer l'arbre et donc la voiture, c'est la force de traction \vec{F} :

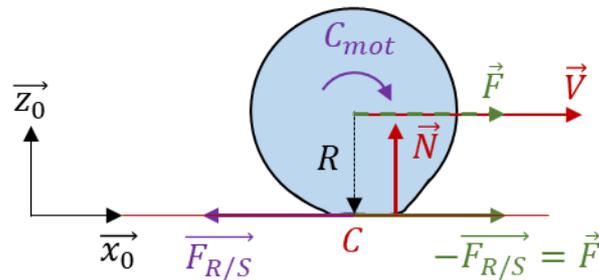


Schéma simplifié des phénomènes entre le pneu et la route.

Pendant les phases d'accélération/décélération, et avec la vitesse, le pneu se déforme. Donc le frottement de roulement (moment par rapport au centre de la roue généré par N) varie. On simplifiera notre étude en considérant que ce moment est constant.

- 1- Appliquer le Théorème du Moment Cinétique à l'essieu, et donner l'expression du couple moteur pour stabiliser la rotation de l'arbre :

On étudie le mouvement de rotation de l'essieu suivant l'axe \vec{y}_0 :

$$I_{essieu}\dot{\omega} = C_{mot} - FR - NR + C_{frott}$$

Et la vitesse de rotation est stable lorsque $\dot{\omega} = 0$:

$$C_{mot} = FR + NR - C_{frott}$$

Si maintenant on ajoute l'effet de la voiture, il faut considérer sa traînée :

$$\vec{f} = f\vec{x}_0 = -\frac{1}{2}\rho SV^2 C_x \vec{x}_0$$

Avec :

- ρ la masse volumique de l'air
- S la surface frontale à l'écoulement de la voiture
- C_x le coefficient de traînée de la voiture, qui dépend principalement de sa forme

- 2- Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la voiture par rapport au référentiel Galiléen lié à la route, et donner l'expression de la traction pour stabiliser la vitesse de la voiture.

On a tout simplement :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f}$$

Soit projeté suivant l'axe d'avancement \vec{x}_0 :

$$m \frac{dV}{dt} = F - \frac{1}{2}\rho SV^2 C_x$$

Et lorsque la vitesse est constante :

$$F = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_x$$

3- Montrer que l'expression du couple moteur $C_{mot}(V)$ nécessaire pour stabiliser une vitesse d'avancement V est alors :

$$C_{mot}(V) = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x R + NR - C_{frott}$$

On a vu qu'à l'équilibre :

$$C_{mot} = FR + NR - C_{frott}$$

Et :

$$F = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x$$

Soit :

$$C_{mot}(V) = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x R + NR - C_{frott}$$

On va supposer que la vitesse est contenue dans une plage de valeurs centrée sur V_0 , telle que l'on peut linéariser la traînée de la voiture comme suit :

$$f = f_0 + \Delta f = -\frac{1}{2} \rho S V_0^2 C_x - K_V \Delta V$$

Où l'on a écrit : $\Delta V = V - V_0$.

Remarque :

Pour connaître l'expression de K_V , on calcule la pente de la courbe :

$$f(V) = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_x$$

A la vitesse V_0 , soit :

$$\left(\frac{df(V)}{dV} \right)_{V=V_0} = -\rho S V_0 C_x = -K_V$$

Dans notre étude on écrira que :

$$f(V_0 + \Delta V) = f_0 + \left(\frac{df(V)}{dV} \right)_{V=V_0} \Delta V$$

On va s'intéresser à un système de capture et maintien de vitesse de la voiture.

Pour cela on considère un état initial pour lequel :

- la voiture avance à la vitesse V_0 (les roues tournent à ω_0 telle que $V_0 = R\omega_0$)
- la position de la pédale de l'accélérateur est $\delta_{acc 0}$ (rad)
- la traction est F_0
- la traînée de la voiture est f_0

Puis le conducteur choisit un écart de vitesse ΔV . Le système doit donc modifier la position de l'accélérateur (donc de la force de traction ΔF) pour capturer et maintenir la nouvelle vitesse $V_0 + \Delta V$.

On propose la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta C_{mot}(p)}{\Delta \delta_{acc}(p)} = \frac{K_C}{1 + \tau_C p}$$

4- Qu'est-ce que cela représente physiquement ? Donner l'unité du gain K_C .

C'est une fonction de transfert du premier ordre. La réponse à un changement de position de l'accélérateur sous forme d'échelon fera augmenter le couple moteur transmis à l'essieu d'une certaine valeur dépendant de l'amplitude de l'échelon et du gain K_C (dépendant de l'efficacité du moteur), avec un temps caractéristique τ_C (retard).

C'est aussi un filtre passe bas de fréquence de coupure $\frac{1}{\tau_C}$. Si l'on fait varier la position de la pédale à une fréquence plus élevée que cette valeur alors le couple n'aura quasiment pas le temps d'évoluer.

L'unité du gain K_C se détermine en observant la relation qu'il est censé établir entre le paramètre d'entrée et de sortie. En entrée on a un angle (pédale) et en sortie un couple donc :

$$[K_C] = Nm \cdot rad^{-1}$$

5- Montrer que la relation du PFD linéarisée est :

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = \Delta F - K_V \Delta V$$

On repart de l'équation :

$$m \frac{dV}{dt} = F + f$$

Qu'on linéarise autour de notre point de départ :

$$m \frac{d(V_0 + \Delta V)}{dt} = F_0 + \Delta F + f_0 + \Delta f$$

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = F_0 + \Delta F + f_0 - K_V \Delta V$$

Sachant qu'à l'état d'équilibre on a :

$$0 = F_0 + f_0$$

Donc :

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = \Delta F - K_V \Delta V$$

6- Montrer que la relation du TMC linéarisée est :

$$I_{essieu} \frac{d\Delta\omega}{dt} = \Delta C_{mot} - \Delta FR$$

On a :

$$I_{essieu} \frac{d(\omega_0 + \Delta\omega)}{dt} = C_{mot}(V_0) + \Delta C_{mot} - F_0 R - \Delta FR - NR + C_{frott}$$

Or :

$$C_{mot}(V_0) = F_0 R + NR - C_{frott}$$

Soit :

$$I_{essieu} \frac{d\Delta\omega}{dt} = \Delta C_{mot} - \Delta FR$$

7- En utilisant les deux relations du PFD et TMC linéarisées, montrer que l'on a la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec :

$$K = \frac{1}{K_V R}$$

$$\tau = \frac{1}{K_V} \left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m \right)$$

En passant les relations linéarisées dans le domaine de Laplace on a :

$$I_{essieu} p \Delta\omega(p) = \Delta C_{mot}(p) - \Delta F(p) R \quad (1)$$

$$R \Delta\omega(p) = \Delta V(p) \quad (2)$$

$$mp \Delta V(p) = \Delta F(p) - K_V \Delta V(p) \quad (3)$$

Donc :

$$\Delta F(p) = [mp + K_V] \Delta V(p) \quad (3)$$

Puis :

$$I_{essieu} p \frac{\Delta V(p)}{R} = \Delta C_{mot}(p) - \Delta F(p) R \quad (1)$$

$$I_{essieu} p \frac{\Delta V(p)}{R} = \Delta C_{mot}(p) - [mp + K_V] \Delta V(p) R$$

$$\left[\frac{I_{essieu} p}{R} + (mp + K_V) R \right] \Delta V(p) = \Delta C_{mot}(p)$$

$$\left[\frac{I_{essieu} p}{R} + (mp + K_V) R \right] \Delta V(p) = \Delta C_{mot}(p)$$

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{1}{\frac{I_{essieu}p}{R} + (mp + K_V)R}$$

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{1}{\left(\frac{I_{essieu}}{R} + mR\right)p + K_V R}$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{\frac{1}{K_V R}}{1 + \frac{1}{K_V} \left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m\right) p}$$

8- Vérifier l'unité du gain K et de la constante de temps τ de cette fonction de transfert.

On a :

$$K = \frac{1}{K_V R}$$

Avec :

$$[K_V] = N \cdot (m \cdot s^{-1})^{-1}$$

Donc :

$$[K] = N^{-1} \cdot s^{-1}$$

Sachant que la fonction de transfert établit une relation entre couple (Nm) et vitesse ($m \cdot s^{-1}$), l'unité du gain est bonne.

Ensuite on a :

$$\tau = \frac{1}{K_V} \left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m \right)$$

Avec :

$$[I_{essieu}] = kg \cdot m^2$$

Donc :

$$[\tau] = \frac{kg}{[K_V]} = \frac{kg}{N \cdot (m \cdot s^{-1})^{-1}} = \frac{kg}{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot (m \cdot s^{-1})^{-1}} = s$$

Tout est bon.

9- Etudier les cas limites sur l'inertie de l'essieu I_{essieu} et la traînée de la voiture.

On a vu que :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{\frac{1}{K_V R}}{1 + \frac{1}{K_V} \left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m\right) p}$$

-Si l'inertie de l'essieu est très grande alors :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} \rightarrow 0$$

Impossible de modifier la vitesse du véhicule...

-Si l'inertie est faible alors :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} \rightarrow \frac{\frac{1}{K_V R}}{1 + \frac{m}{K_V} p}$$

Le temps caractéristique associé à l'évolution de la vitesse suite à une entrée en couple dépend seulement de la masse du véhicule, ainsi que sa trainée.

-Si la trainée de la voiture est faible/varie faiblement (K_V petit) alors :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} \rightarrow \frac{\frac{1}{K_V R}}{\frac{1}{K_V} \left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m \right) p} = \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m \right) p}$$

Pour comprendre ce qu'il se passe on peut repartir de nos équations du système :

$$I_{essieu} \frac{d\Delta\omega}{dt} = \Delta C_{mot} - \Delta FR \quad (1)$$

$$R\Delta\omega = \Delta V \quad (2)$$

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = \Delta F - K_V \Delta V \quad (3)$$

Si le couple augmente, la vitesse de rotation des roues aussi, ainsi que la vitesse d'avancement. La traction est, dans le cas d'une trainée faible, directement responsable de l'accélération de la voiture :

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = \Delta F \quad (3)$$

Mais on voit que la voiture ne s'arrête jamais puisqu'elle n'est contrée par aucune force.

La réponse en vitesse suite à une entrée en couple tend donc forcément vers l'infini, ce que nous indique bien l'expression de notre fonction de transfert...

-Si la trainée de la voiture est importante/varie de manière importante (K_V grand) alors :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} \rightarrow 0$$

Si le couple diminue, les roues vont tourner moins vite. La vitesse de la voiture également. Dans ce cas la traction diminue bien, mais comme la trainée diminue fortement avec la vitesse, la somme des forces va repasser positive, faisant accélérer la voiture...

Finalement, la vitesse V_0 est un point d'équilibre dont la voiture ne peut sortir.

10- Dessiner le schéma bloc à retour unitaire représentant notre système de capture de la vitesse, avec pour entrée $\Delta V_c(p)$ la variation de vitesse commandée par rapport à la vitesse initiale V_0 , et sortie la variation de vitesse réelle de la voiture : $\Delta V(p)$.

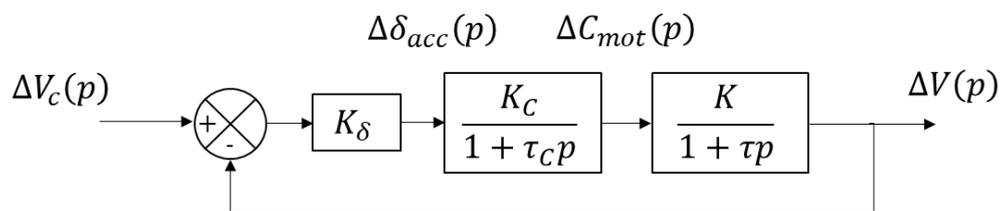
Note : on introduira un gain K_δ ($rad. ms^{-1}$) qui fait le lien entre écart de vitesse $\Delta V_c - \Delta V$ et position de pédale δ_{acc} .

On liste les fonctions de transfert obtenues jusque maintenant :

$$\frac{\Delta C_{mot}(p)}{\Delta \delta_{acc}(p)} = \frac{K_C}{1 + \tau_C p}$$

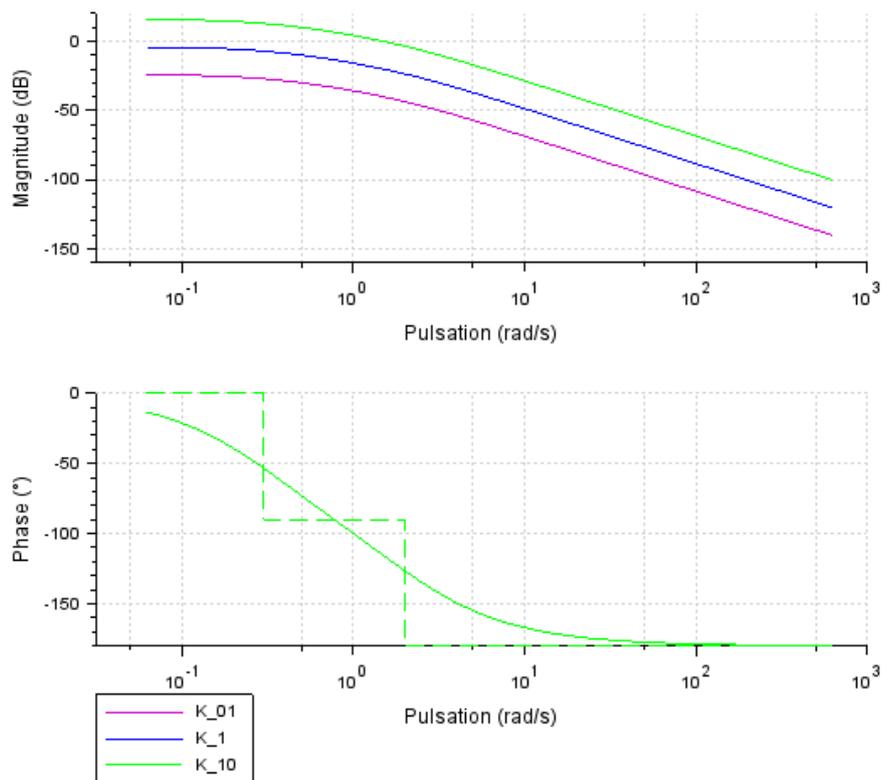
$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On a donc le schéma simple suivant :



Pour notre exemple, on a calculé $K = 0,042$ et $\tau = 3,306$, et pris $K_C = 15$ et $\tau_C = 0,5$.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) donne :



Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de K_δ (0,1 ; 1 ; 10).

11- Comment va réagir la voiture à des ordres basses fréquences/hautes fréquences ?

A basse fréquence le gain de la fonction de transfert reste constant, et le déphasage tend vers 0. La voiture (sa vitesse) répondra en phase avec les ordres, d'amplitude dépendant notamment du gain K_δ .

A haute fréquence, le gain tend vers $-\infty$ donc la voiture ne répondra pas aux ordres fréquences.

12- Déterminer les pôles de la FTBO.

Les racines du dénominateur (pôles) de la FTBO sont : $-0,3$ et -2 ($= -\frac{1}{\tau}$ et $-\frac{1}{\tau_c}$). Elles ont toutes une partie réelle négative, le système est naturellement stable.

13- Est-ce que la voiture sera stable en boucle fermée ?

La FTBO étant stable (racines du dénominateur à partie réelle négative), les conditions de stabilité en boucle fermée d'après le diagramme de Bode sont :

-Gain inférieur à 0 dB lorsque le déphasage vaut -180° : c'est le cas ici, puisque le déphasage n'atteint jamais -180° .

-Déphase supérieur à -180° lorsque le gain vaut 0 dB : c'est le cas ici puisque le déphasage n'atteint jamais -180° . La marge diminue néanmoins avec la valeur de K_δ .

La voiture est donc un système stable en boucle fermée, peu importe la valeur de K_δ .

14- Montrer que l'on a l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_\delta K_C K}{(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + K_\delta K_C K}$$

On a d'après le schéma :

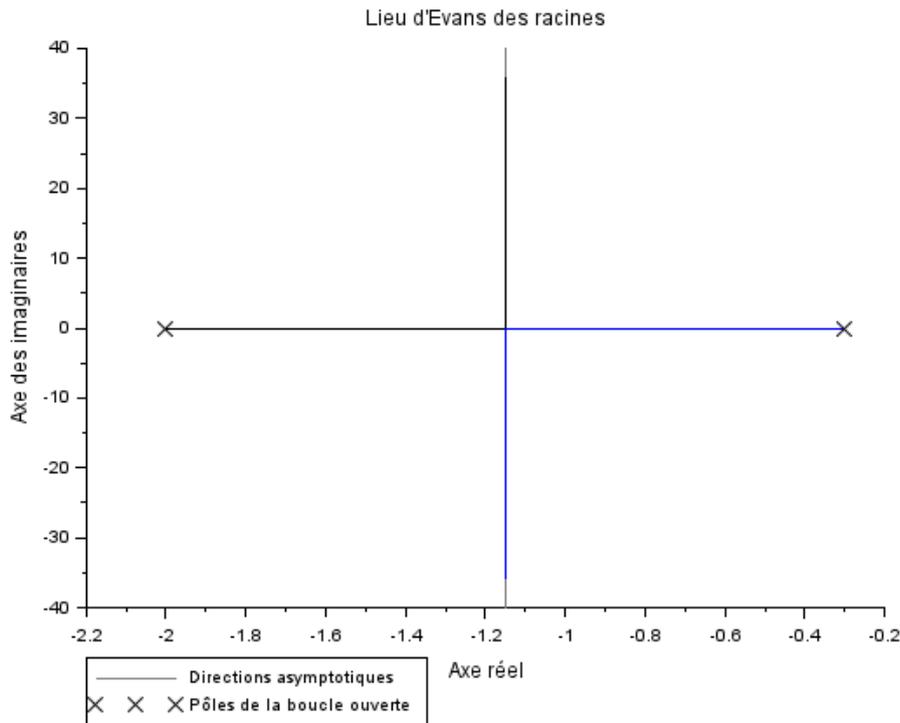
$$[\Delta V_c(p) - \Delta V(p)] K_\delta \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} = \Delta V(p)$$

$$\Delta V_c(p) K_\delta \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} = \Delta V(p) \left[1 + K_\delta \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \right]$$

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_\delta \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + K_\delta \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}}$$

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_\delta K_C K}{(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + K_\delta K_C K}$$

On trace le lieu des racines du dénominateur (pôles) de la FTBF, pour un gain K_δ partant de 0 (FTBO) à l'infini :



15- Est-ce que cela confirme la réponse donnée précédemment ? Que se passe-t-il lorsque le gain K_δ augmente ?

Cela confirme bien notre réponse précédente puisque les racines du dénominateur de la FTBF auront toujours leur partie réelle négative, peu importe la valeur du gain K_δ .

Mais on note que ces racines, initialement réelles, vont finir par se transformer en deux racines complexes conjuguées. Cela veut dire qu'il va apparaître des oscillations dans les variations de vitesse de la voiture à partir d'une certaine valeur de gain K_δ .

16- Montrer que l'expression de la valeur finale d'écart de vitesse ΔV_f suite à un échelon de vitesse commandé d'amplitude ΔV_{c0} est :

$$\Delta V_f = \Delta V_{c0} \frac{K_\delta K_C K}{1 + K_\delta K_C K}$$

Un échelon dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$\Delta V_c(p) = \frac{\Delta V_{c0}}{p}$$

Et la réponse en vitesse est donnée directement par :

$$\Delta V(p) = \Delta V_c(p) \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{\Delta V_{c0}}{p} \frac{K_\delta K_C K}{\tau_c \tau p^2 + (\tau_c + \tau)p + 1 + K_\delta K_C K}$$

Et le théorème de la valeur finale nous donne :

$$\Delta V_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta V(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta V_{c0}}{p} \frac{K_\delta K_C K}{\tau_c \tau p^2 + (\tau_c + \tau)p + 1 + K_\delta K_C K}$$

$$\Delta V_f = \Delta V_{c0} \frac{K_\delta K_C K}{1 + K_\delta K_C K}$$

17- Vérifier la cohérence de cette expression en étudiant les cas limites sur le gain K_δ .

Le gain K_δ fait le lien entre écart de vitesse observé et commandé, et la variation de position de l'accélérateur à appliquer. Si ce gain est important, l'écart finale de vitesse va tendre vers l'écart de vitesse commandée :

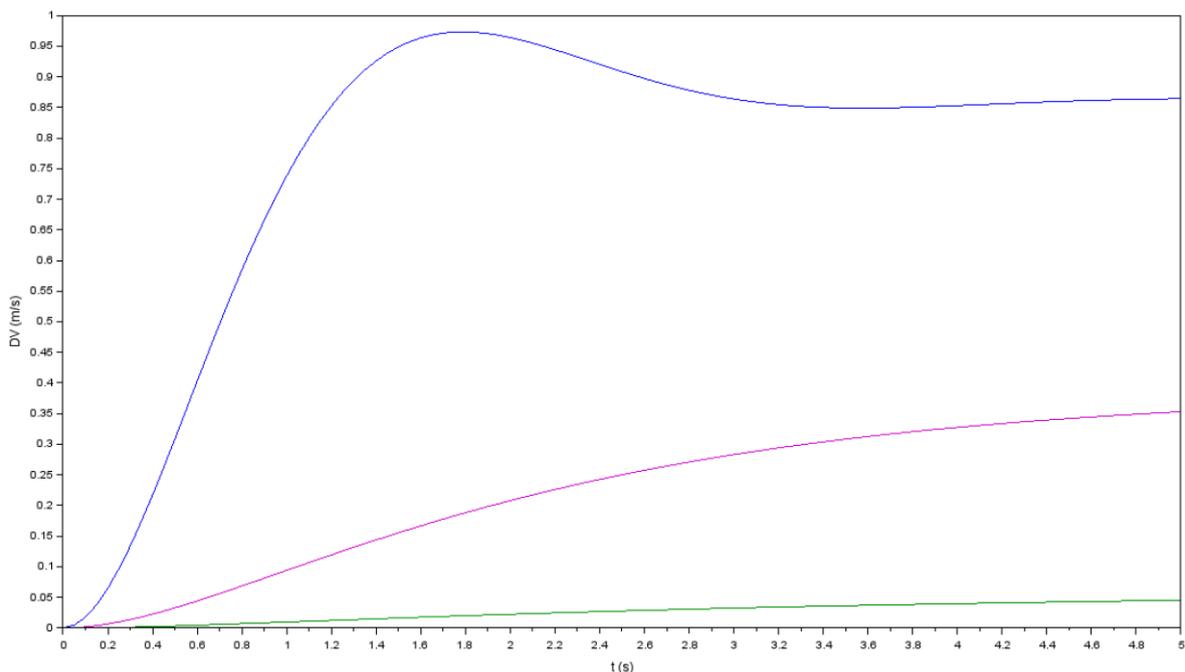
$$\lim_{K_\delta \rightarrow +\infty} \Delta V_f = \Delta V_{c0}$$

Tandis qu'une valeur faible (cas limite nulle), fait que la vitesse de la voiture ne variera pas :

$$\lim_{K_\delta \rightarrow 0} \Delta V_f = 0$$

La différence entre écart de vitesse observé et commandé n'a dans ce cas pas d'effet sur la position de l'accélérateur...

On a les différentes courbes présentant l'évolution de l'écart de vitesse ΔV pour différentes valeurs de K_δ (0,1 ; 1 et 10) suite à un échelon en entrée d'amplitude $\Delta V_{c0} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:



Données :

Les racines du dénominateur/pôles de la FTBF (directement tirées du lieu d'Evans tracé précédemment) sont :

-Pour $K_\delta = 0,1$: $-1,98$; $-0,33$

-Pour $K_\delta = 1$: $-1,73$; $-0,57$

-Pour $K_\delta = 10$: $-1,15 \pm 1,76i$

18- Quelle(s) information(s) peut-on tirer de ces courbes ?

Partant de la vitesse V_0 , le conducteur souhaite changer de vitesse de ΔV_{c0} . Initialement, l'ordre de variation de position de l'accélérateur sera : $\Delta \delta_{acc} = \Delta V_{c0} K_\delta$.

Il est clair que si le gain K_δ est important, la réaction initiale de la voiture risque également de l'être (courbe bleue), ce qui est plutôt bien.

On le voit sur l'évolution de la valeur de la partie réelle des racines. Pour les faibles gains on a toujours un racines plutôt « faible » (pour $K_\delta = 0,1$: $-0,33$ et pour $K_\delta = 1$: $-0,57$). Tandis qu'à plus haut gain on a les deux racines qui ont une partie réelle à $-1,15$.

De même on note que l'erreur diminue avec l'augmentation du gain (ce qui confirme ce que l'on a vu précédemment).

On pourrait croire qu'augmenter le gain permettrait de n'obtenir que de bons résultats, mais on se rappelle que cela fait aussi apparaître des oscillations, ici pour le gain $K_\delta = 10$...

On note que la période des oscillations est approximativement $1,82 = 3,6$ s. Donc la pulsation vaut $\omega_p = \frac{2\pi}{3,6} = 1,75$ Hz, qui est la partie imaginaire des racines de la FTBF pour le gain $K_\delta = 10$.

Cela paraît cohérent puisqu'un système qui réagit de manière brutale aux entrées aura du mal à approcher de manière « douce » la consigne.

Il faut donc trouver une valeur de gain qui permettent d'avoir un temps de réponse pas trop important, une valeur finale de vitesse pas trop faible, et pas d'oscillations.

On suppose que la voiture et le moteur sont faits de telle manière que K_c et K ne peuvent être modifiés.

On souhaite que, pour une entrée en échelon d'amplitude 1 m/s, le système stabilise la vitesse de la voiture :

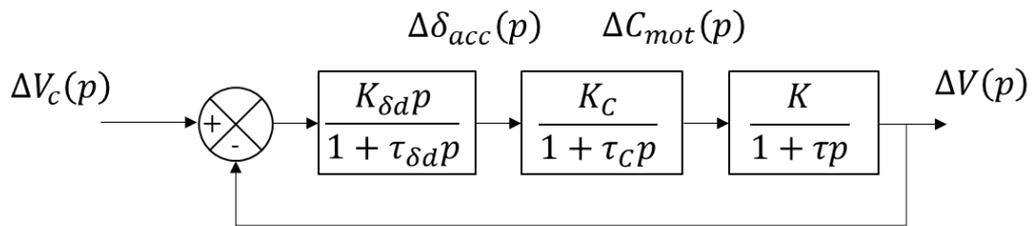
- A ± 2 % de la valeur consigne en moins de 3 s,
- Sans dépassement de plus de 10% de la valeur consigne

19- Est-ce qu'une valeur de gain seul permet d'obtenir un résultat satisfaisant par rapport aux critères imposés ?

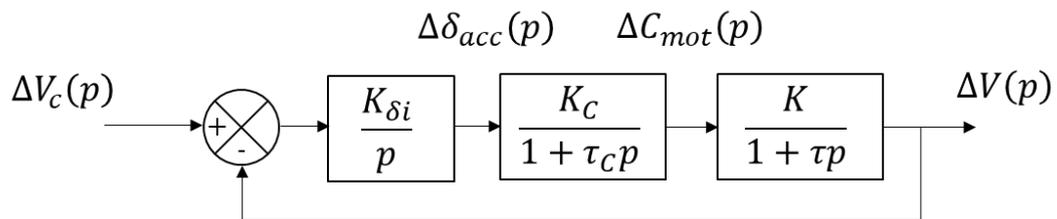
On voit bien, d'après les courbes vues précédemment qu'un gain seul ne permet pas de répondre aux critères (dilemme : erreur-rapidité/oscillations).

On propose plusieurs types de correcteur :

Correcteur 1 (dérivé)



Correcteur 2 (intégral)



La FTBO est donc, pour le premier cas :

$$K_{\delta d} \frac{K_C K p}{(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_C p)(1 + \tau p)}$$

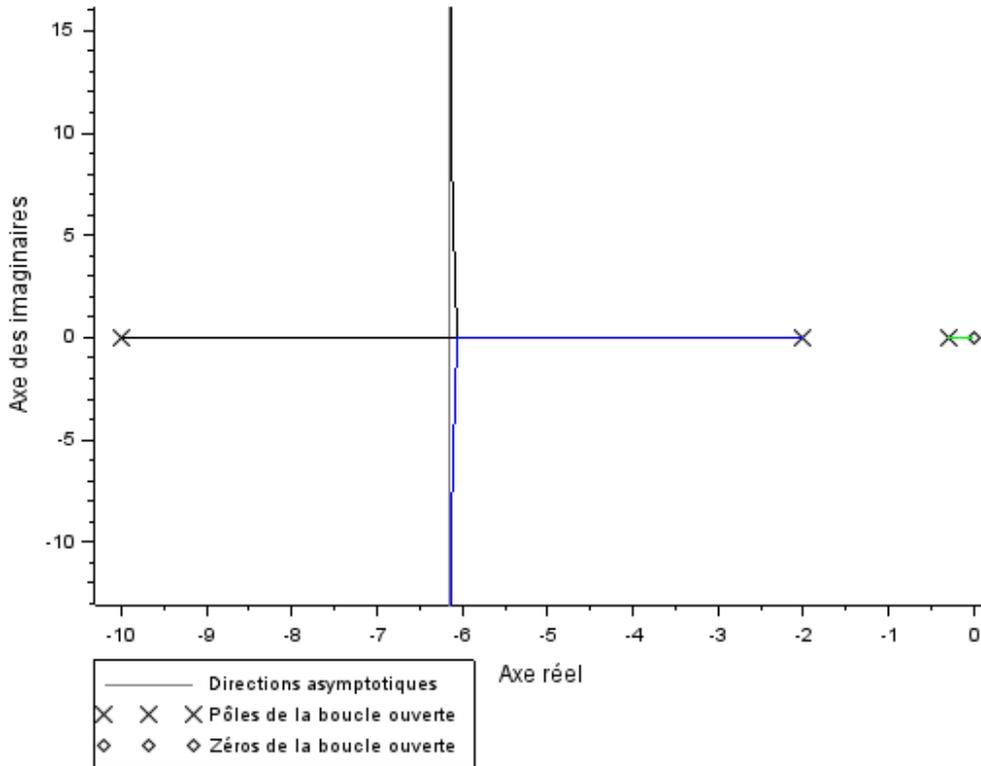
Et pour le second cas :

$$K_{\delta i} \frac{K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p)}$$

On trace le lieu des racines pour des gains $K_{\delta d}, K_{\delta i}$ allant de 0 (FTBO) à l'infini :

Correcteur 1 ($\tau_{\delta d} = 0,1 s$) :

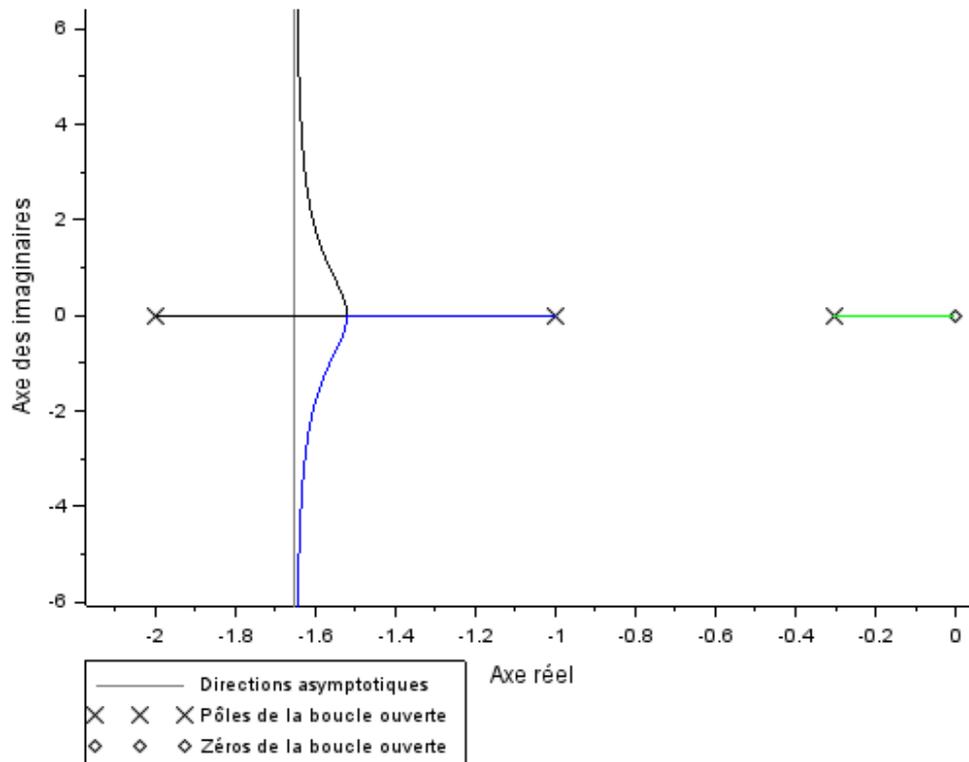
Lieu d'Evans des racines



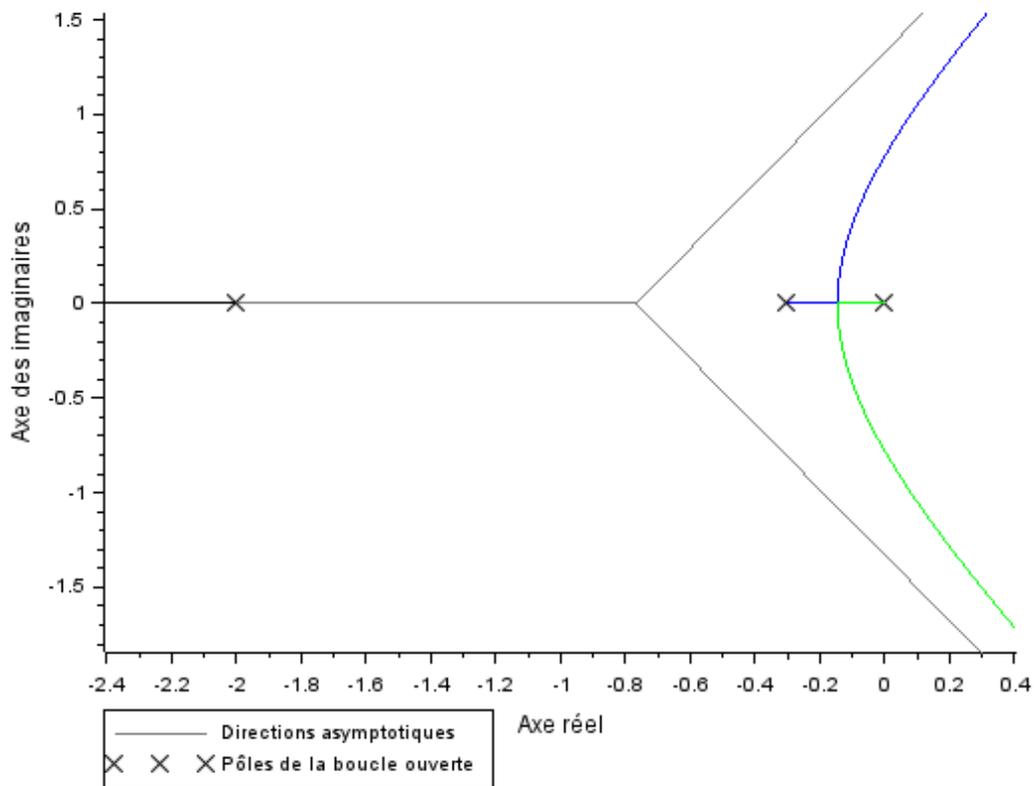
Les pôles tendent vers les zéros (racines du numérateur) de la FTBO. Ici on a juste 0.

Correcteur 1 ($\tau_{\delta d} = 1 s$) :

Lieu d'Evans des racines



Correcteur 2 :
Lieu d'Evans des racines



Dans ce second cas il n'y a pas de zéro, donc les pôles n'atteignent jamais de valeurs finies.

20- Quelle(s) information(s) peut-on déjà tirer de ces graphes ?

Sur le lieu des racines de la FTBF sans correcteur on a vu qu'elles portaient des valeurs : $-0,3$ et -2 . Ce que l'on retrouve sur les graphes ci-dessus, puisqu'elles correspondent aux valeurs de $-\frac{1}{\tau}$ et $-\frac{1}{\tau_c}$. Mais on note que les correcteurs ajoutent une racine supplémentaire (ils modifient la dynamique naturelle de la voiture), correspondant à $-\frac{1}{\tau_{\delta d}}$ ou 0. On note également que le correcteur dérivé ajoute un zéro qui vaut 0. Finalement, le lieu est modifié.

Pour le premier correcteur :

Il apparaît évident que plus on augmente $\tau_{\delta d}$ plus la racine ajoutée s'approche de l'axe des ordonnées, ce qui aura tendance à ralentir le système (plus lent à stabiliser sa valeur).

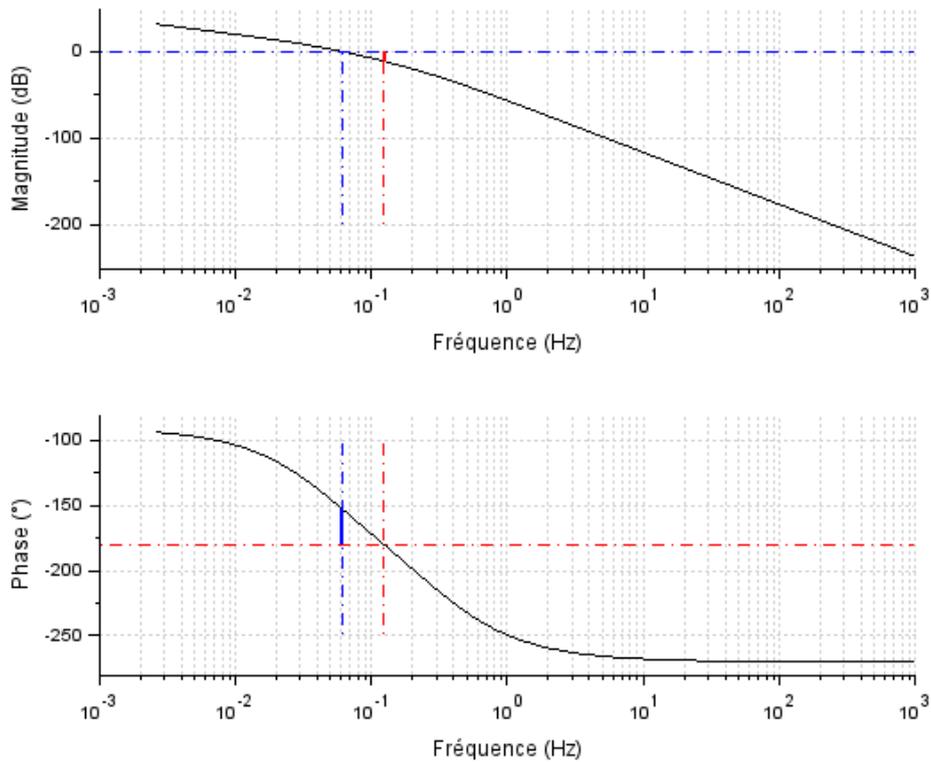
En revanche, il ne rendra pas la voiture instable. Peu importe le gain $K_{\delta d}$, les pôles ont toujours une partie réelle négative. On note qu'une racine tend vers 0, ce qui peut être signe de lenteur dans l'établissement de la réponse finale.

Pour le second correcteur :

On peut rendre le système instable si le gain est trop important.

Dans les deux cas les racines peuvent être complexes conjuguées, ce qui risque de faire apparaître des oscillations dans la réponse en vitesse de la voiture.

On trace le diagramme de Bode de la FTBO avec correcteur intégral $K_{\delta i} = 1$:



On donne la marge de gain : 11,26 dB.

21- Donner la valeur de $K_{\delta i}$ à partir de laquelle le système devient instable en boucle fermée.

On peut écrire le gain de la FTBO :

$$G_{dB} = 20 \log(K_{\delta i}) + 20 \log \left(\frac{K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p)} \right)$$

Si $K_{\delta i} = 1$ alors :

$$G_{dB} = 20 \log \left(\frac{K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p)} \right)$$

Et à la fréquence telle que le déphasage vaut -180° on a :

$$G_{dB \ 180} = -11,26 = 20 \log \left(\frac{K_C K}{p_{180}(1 + \tau_C p_{180})(1 + \tau p_{180})} \right)$$

On cherche la valeur de $K_{\delta i}$ telle qu'à la fréquence où l'on a un déphasage de -180° on a :

$$G_{dB \ 180} = 0$$

Avec :

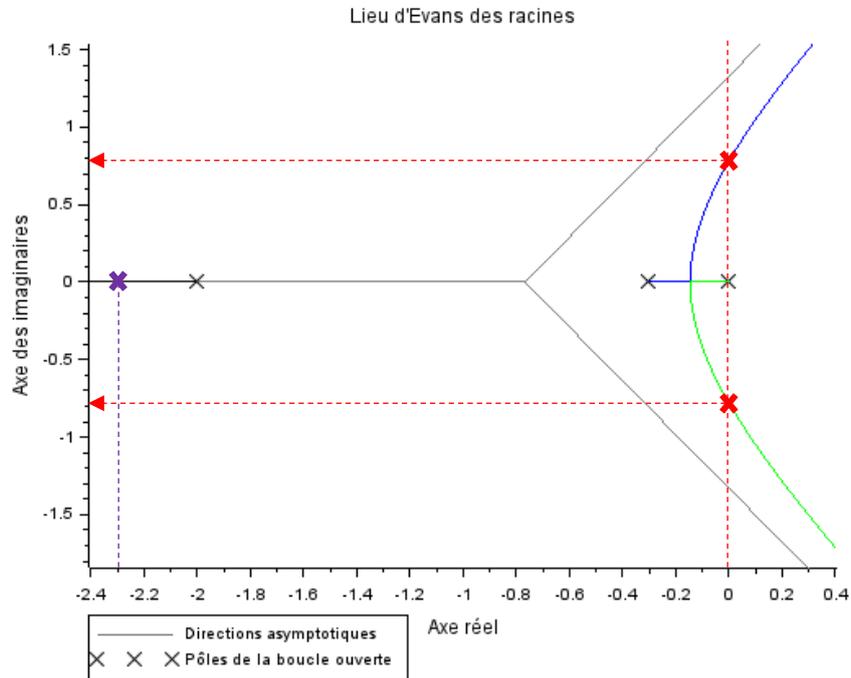
$$\begin{aligned} G_{dB \ 180} &= 20 \log(K_{\delta i}) + 20 \log \left(\frac{K_C K}{p_{180}(1 + \tau_C p_{180})(1 + \tau p_{180})} \right) \\ &= 20 \log(K_{\delta i}) - 11,26 = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$K_{\delta i} = 10^{\frac{11,26}{20}} = 3,66$$

Lorsque l'on calcule les racines de la FTBF on a, avec ce gain :
 $-2,3 ; 0 \pm 0,78i$

Ce que le lieu des racines confirme :



22- Montrer que les fonctions de transfert en boucle fermée sont :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_{\delta a} K_C K p}{(1 + \tau_{\delta a} p)(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta a} K_C K p}$$

Et :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_{\delta i} K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta i} K_C K}$$

On peut utiliser la formule de Black :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= \frac{\frac{K_{\delta a} p}{1 + \tau_{\delta a} p} \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K_{\delta a} p}{1 + \tau_{\delta a} p} \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p}} \\ &= \frac{K_{\delta a} K_C K p}{(1 + \tau_{\delta a} p)(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta a} K_C K p} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= \frac{\frac{K_{\delta i}}{p} \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K_{\delta i}}{p} \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p}} \\ &= \frac{K_{\delta i} K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta i} K_C K} \end{aligned}$$

23- Donner l'expression de la valeur finale pour un échelon d'amplitude ΔV_{c0} dans les deux cas.

On a :

$$\Delta V_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta V(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta V_{c0}}{p} \frac{K_{\delta d} K_C K p}{(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta d} K_C K p}$$

$$\Delta V_f = 0$$

Et :

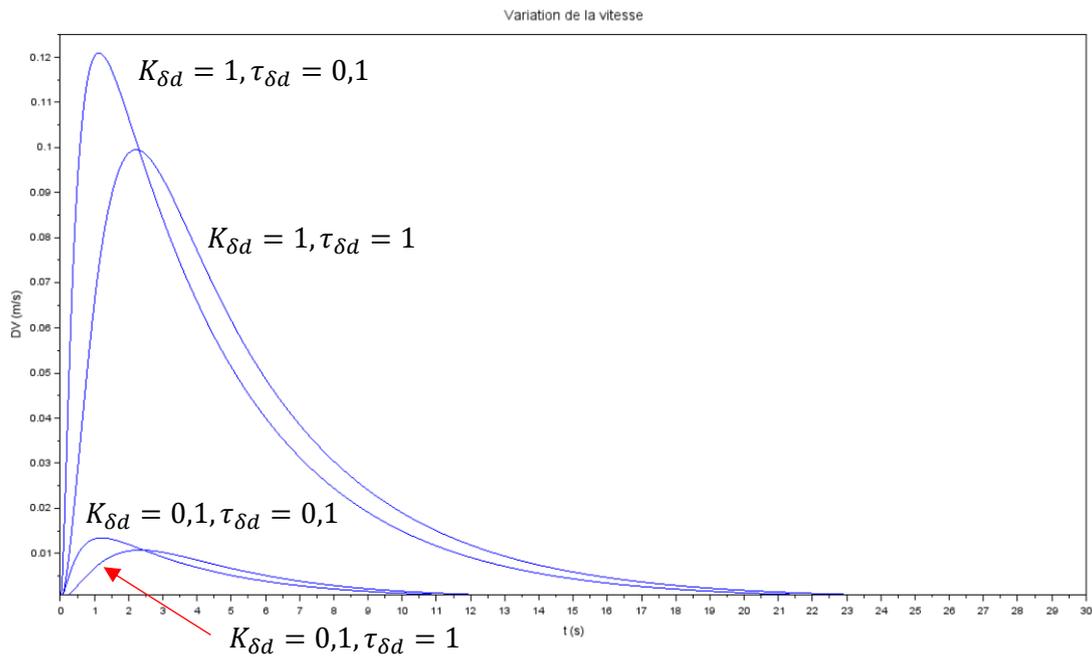
$$\Delta V_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta V(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta V_{c0}}{p} \frac{K_{\delta i} K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta i} K_C K}$$

$$\Delta V_f = \Delta V_{c0}$$

La correction dérivée rend la valeur finale nulle...

Tandis que la correction intégrale permet d'avoir une erreur nulle, ce qui peut nous intéresser.

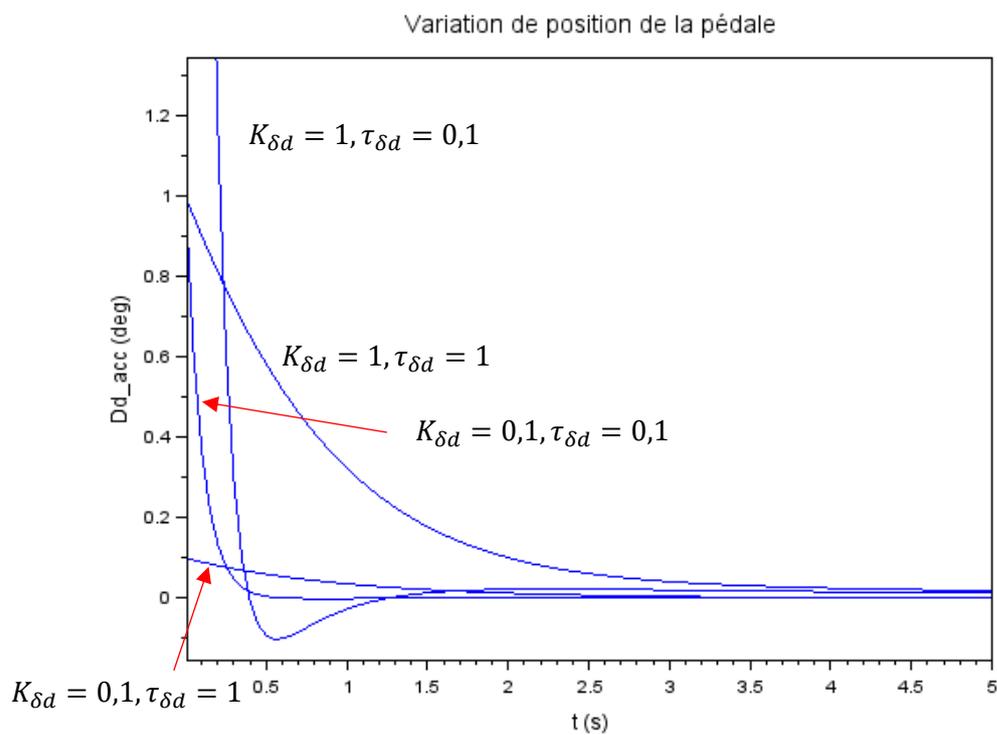
On a les réponses suivantes avec différentes valeurs de $K_{\delta d}$, $\tau_{\delta d}$ et $K_{\delta i}$ (on a calculé $K = 0,042$ et $\tau = 3,306$ et pris $K_C = 15$ et $\tau_C = 0,5$) suite à un échelon en entrée d'amplitude $\Delta V_{C0} = 1 \text{ m. s}^{-1}$:

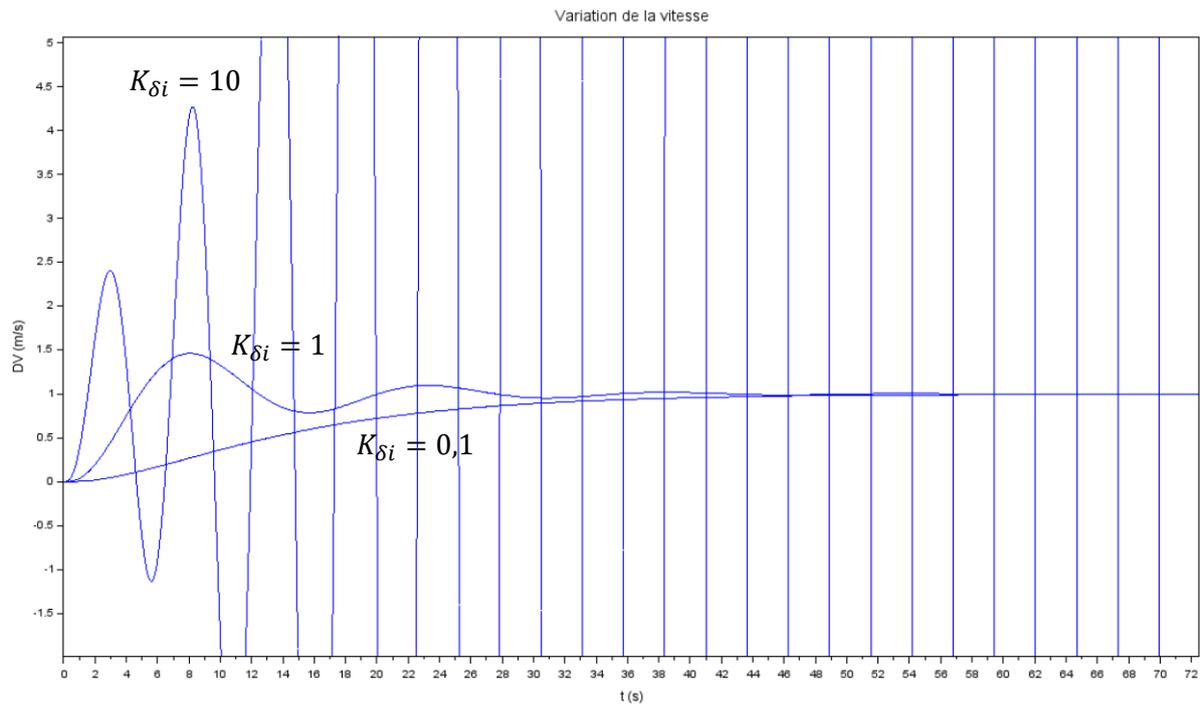


Données :

Les racines du dénominateur/pôles de la FTBF sont :

- Pour $K_{\delta d} = 0,1, \tau_{\delta d} = 0,1$: $-0,3 ; -2,1 ; -10$
- Pour $K_{\delta d} = 0,1, \tau_{\delta d} = 1$: $-0,3 ; -1,1 ; -2$
- Pour $K_{\delta d} = 1, \tau_{\delta d} = 0,1$: $-0,2 ; -2,6 ; -9,5$
- Pour $K_{\delta d} = 1, \tau_{\delta d} = 1$: $-0,2 ; -1,5 \pm 0,5i$





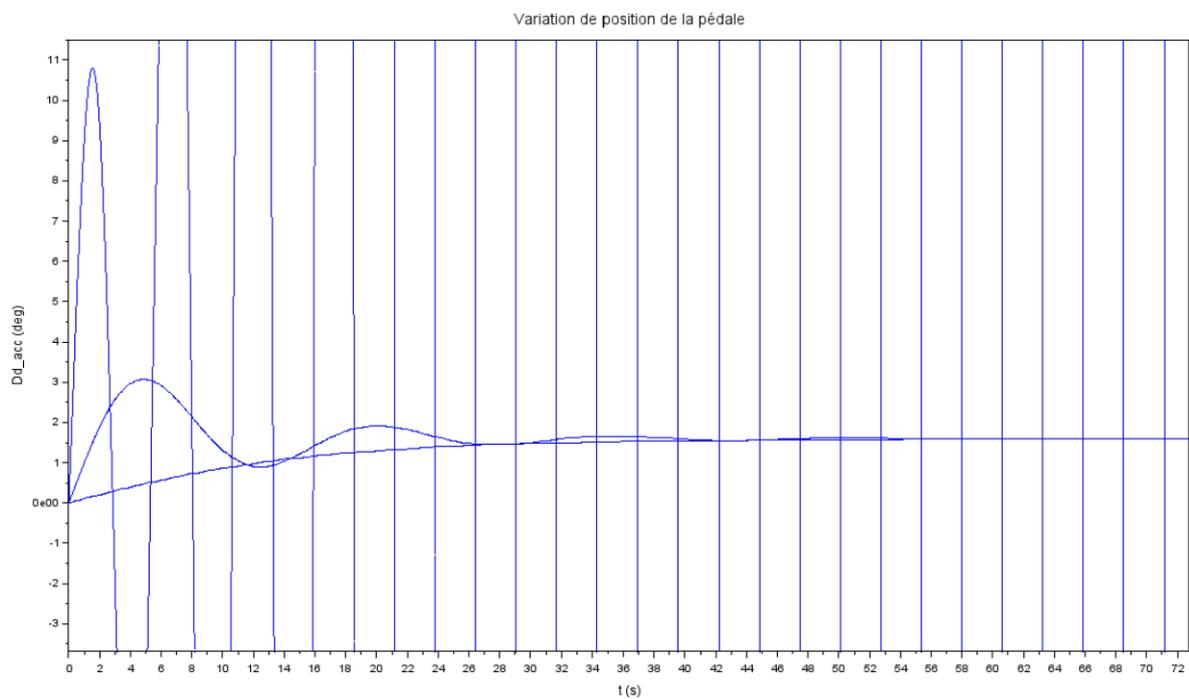
Données :

Les racines du dénominateur/pôles de la FTBF sont :

-Pour $K_{\delta i} = 0,1$: -2 ; $-0,19$; $-0,1$

-Pour $K_{\delta i} = 1$: $-2,1$; $-0,1 \pm 0,4i$

-Pour $K_{\delta i} = 10$: $-2,6$; $0,16 \pm 1,2i$



Remarque :

On trace l'évolution de la variation de la position de l'accélérateur en écrivant :

$$\Delta\delta_{acc}(p) = \frac{K_{\delta d}p}{1 + \tau_{\delta d}p} [\Delta V_c(p) - \Delta V(p)] = \frac{K_{\delta d}p}{1 + \tau_{\delta d}p} \Delta V_c(p) \left[1 - \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} \right]$$

$$\frac{\Delta\delta_{acc}(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_{\delta d}p}{1 + \tau_{\delta d}p} \left[1 - \frac{K_{\delta d}K_C K p}{(1 + \tau_{\delta d}p)(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta d}K_C K p} \right]$$

Et :

$$\frac{\Delta\delta_{acc}(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_{\delta i}}{p} \left[1 - \frac{K_{\delta i}K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_{\delta i}K_C K} \right]$$

24- Expliquer l'effet de chacun des correcteurs.

De manière globale, plus on augmente le gain d'un correcteur, plus la réponse est rapide et d'amplitude importante. C'est tout à fait normal puisque l'on augmente l'ordre à la pédale pour une même mesure d'écart $\Delta V_c - \Delta V$ en entrée.

Pour le correcteur dérivé :

La réaction initiale est plus brutale. A partir du moment où l'écart varie (instantanément théoriquement au moment de l'application de l'échelon), alors la dérivée est importante.

La vitesse va également augmenter brutalement et du coup automatiquement générer un relâchement de la pédale, mais moins violent que le coup d'accélérateur initial. La vitesse va donc elle aussi diminuer mais plus lentement qu'elle n'était montée. Et puisque cette correction ne laisse pas passer les ordres basse fréquence (variation lente), la pédale bouge moins, comme la vitesse, et donc la voiture se restabilise à la vitesse de départ.

Le gros problème, c'est qu'un signal constant non nul génère un ordre nul.

En bref, on gagne en agressivité mais pas en précision...

Remarque :

Concernant le temps caractéristique $\tau_{\delta d}$, il représente le fait que la correction dérivée ne peut pas, en pratique, s'appliquer aux hautes fréquences (amplification du signal de plus en plus importante).

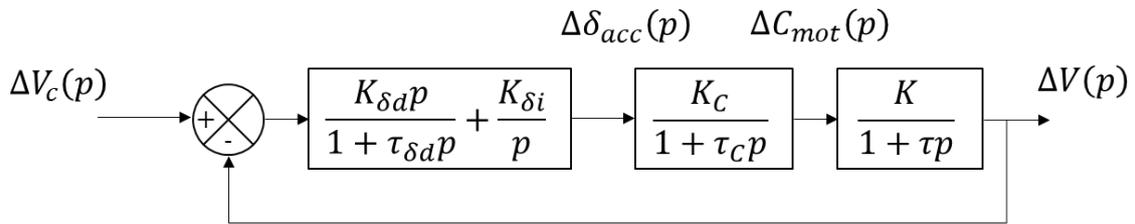
Pour la correction intégrale :

On prend en compte l'aire sous la courbe $\Delta V_c - \Delta V$, donc est nécessairement plus « lente » à la réaction au départ. La dynamique naturelle de la voiture (qui possède des retards à l'établissement du couple moteur et la vitesse en elle-même) mêlée à la correction à « retardement » ne va pas dans le sens de la stabilité, d'autant plus que la réaction à un écart est violent (gain fort).

Donc comme anticipé avec le lieu d'Evans, pour un gain du correcteur intégral important, il apparait des oscillations divergentes.

En bref, on gagne en précision (attention aux gains importants), mais on perd un peu en agressivité.

Suite à ces conclusions, on souhaite pouvoir bénéficier des avantages des deux types de correction en réalisant le schéma suivant :



On a la FTBO qui s'écrit :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \left(\frac{K_{\delta d} p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{K_{\delta i}}{p} \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}$$

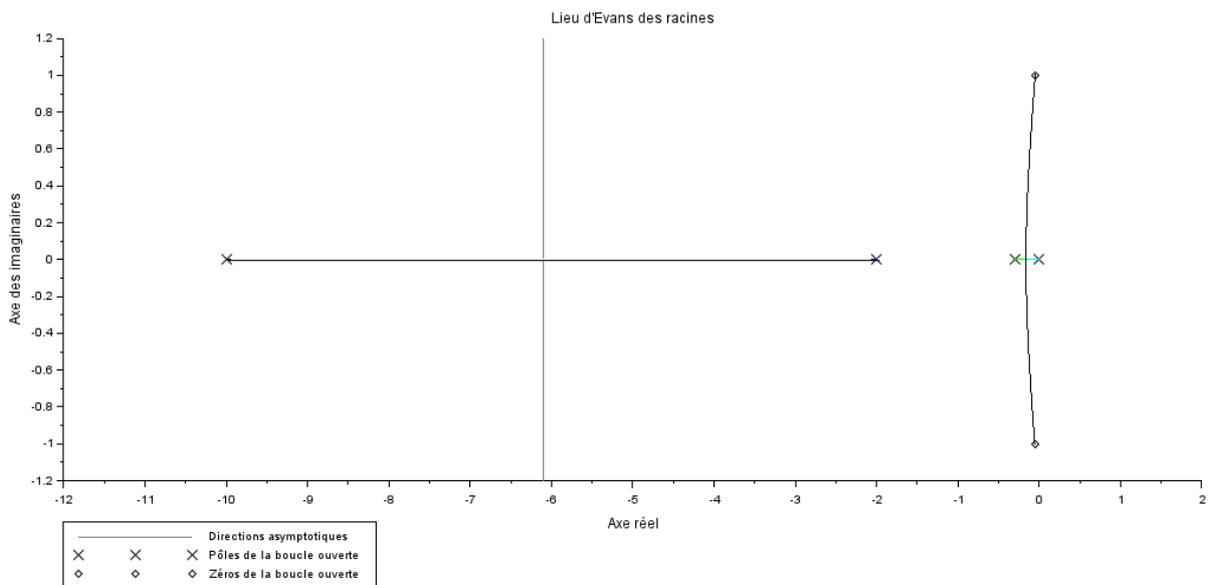
Avec dans un premier temps $K_{\delta d} = K_{\delta i} = K_{\delta di}$.

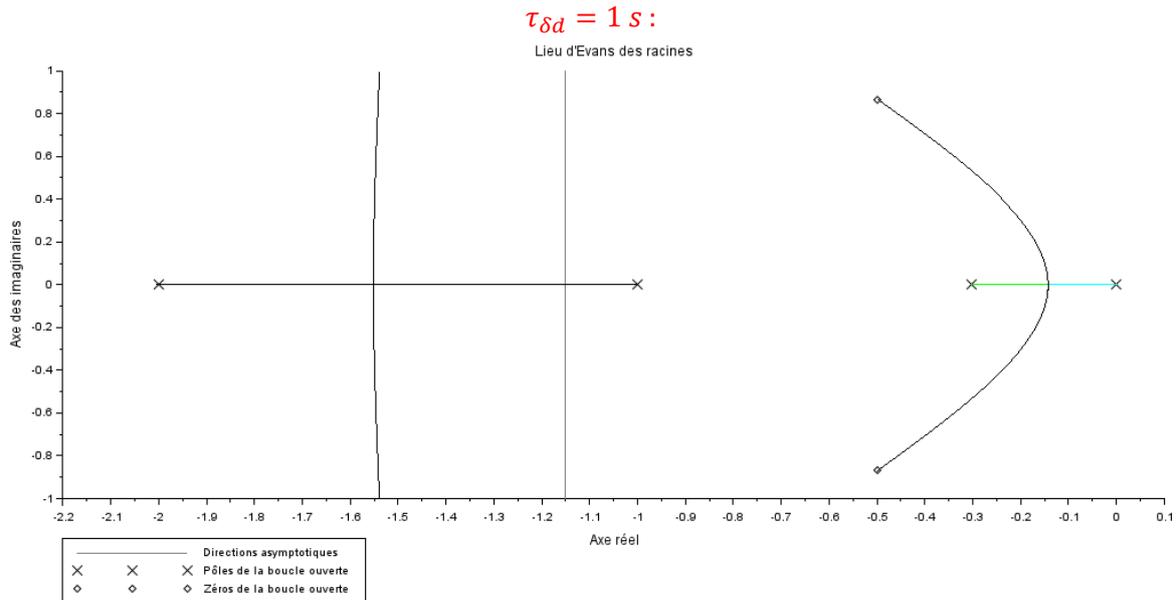
Donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= K_{\delta di} \left(\frac{p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{1}{p} \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \\ &= K_{\delta di} \left(\frac{p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{1}{p} \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \\ &= K_{\delta di} \frac{p^2 + \tau_{\delta d} p + 1}{p(1 + \tau_{\delta d} p)} \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \end{aligned}$$

De manière schématique, les lieux des pôles de la FTBF en fonction du gain $K_{\delta di}$ sont :

$$\tau_{\delta d} = 0,1 \text{ s} :$$





25- A priori, quels sont les avantages/inconvénients de chacune des valeurs de $\tau_{\delta d}$?

Pour le temps 0,1 s on voit qu'à partir d'une certaine valeur de gain il risque d'y avoir des oscillations presque entretenues (partie réelle des deux racines complexes à droite proche de 0). Mais en choisissant 1 s on perd en rapidité (les parties réelles ne sont pas très négatives par rapport au temps 0,1 s, à part les deux racines complexes proches de l'axe des ordonnées).

26- Montrer que la FTBF s'écrit :

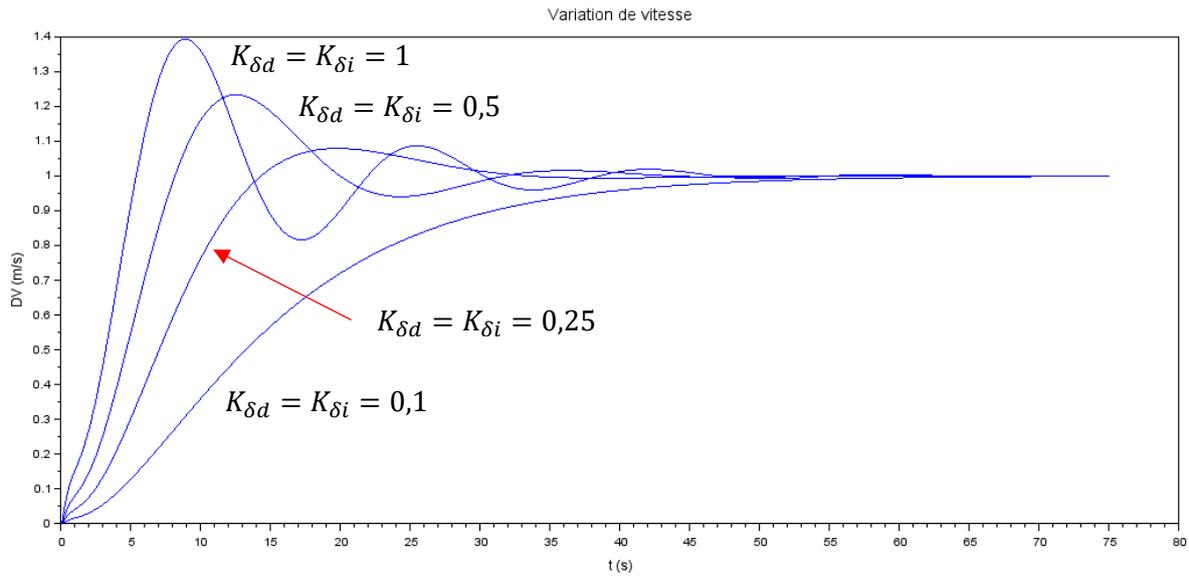
$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{(K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i}(1 + \tau_{\delta d} p)) K_C K}{p(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + (K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i}(1 + \tau_{\delta d} p)) K_C K}$$

On a :

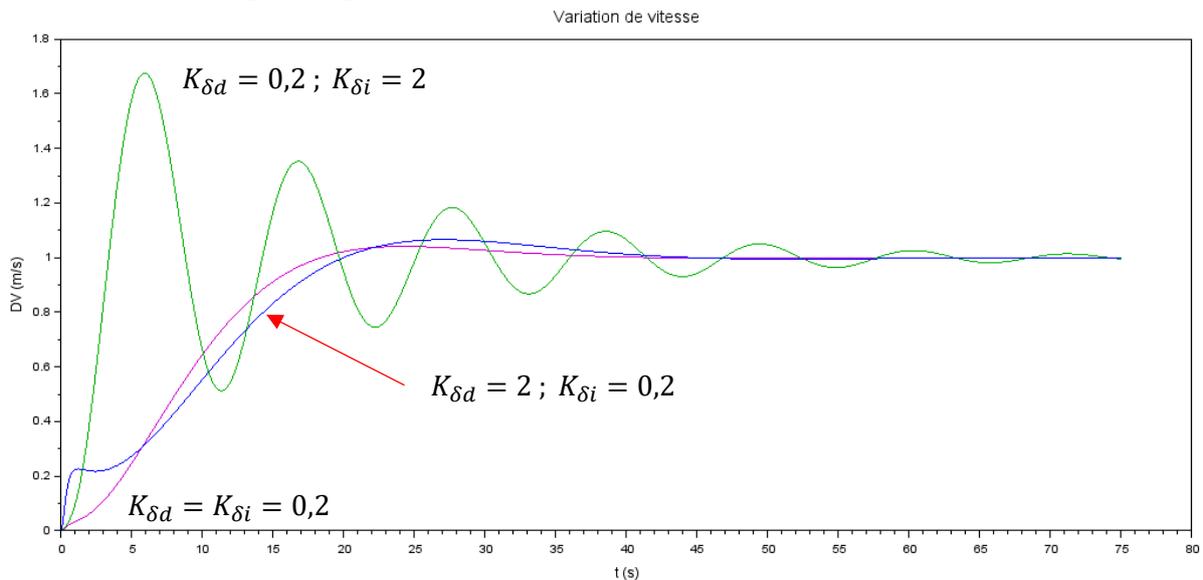
$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= \frac{\left(\frac{K_{\delta d} p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{K_{\delta i}}{p}\right) \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \left(\frac{K_{\delta d} p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{K_{\delta i}}{p}\right) \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}} \\ &= \frac{\frac{K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i}(1 + \tau_{\delta d} p)}{p(1 + \tau_{\delta d} p)} \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i}(1 + \tau_{\delta d} p)}{p(1 + \tau_{\delta d} p)} \frac{K_C}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}} \\ &= \frac{(K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i}(1 + \tau_{\delta d} p)) K_C K}{p(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + (K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i}(1 + \tau_{\delta d} p)) K_C K} \end{aligned}$$

On prend $\tau_{\delta d} = 0,1 \text{ s}$.

On obtient les courbes suivantes :



Et en modifiant les gains séparément on a :



27- Que faut-il faire pour répondre aux critères ?

Rappel :

« On souhaite que, pour une entrée en échelon d'amplitude 1 m/s , le système stabilise la vitesse de la voiture :

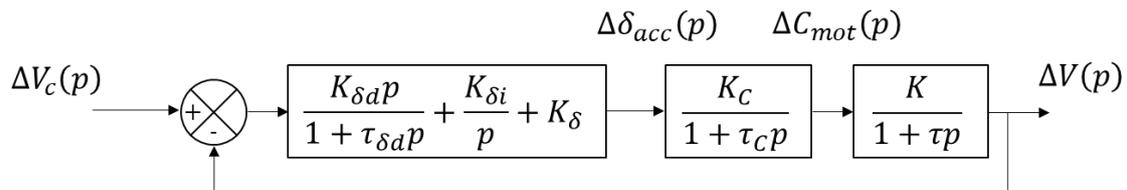
- A $\pm 2 \%$ de la valeur consigne en moins de 3 s ,
- Sans dépassement de plus de 10% de la valeur consigne »

Il apparait clairement que le système n'est pas suffisamment rapide, et que des oscillations importantes apparaissent, même si l'erreur finale est faible.

On aurait pu s'en douter d'après le lieu des racines vu précédemment.

On peut essayer de régler chaque gain différemment, ou ajouter un correcteur proportionnel.

On propose le schéma suivant :



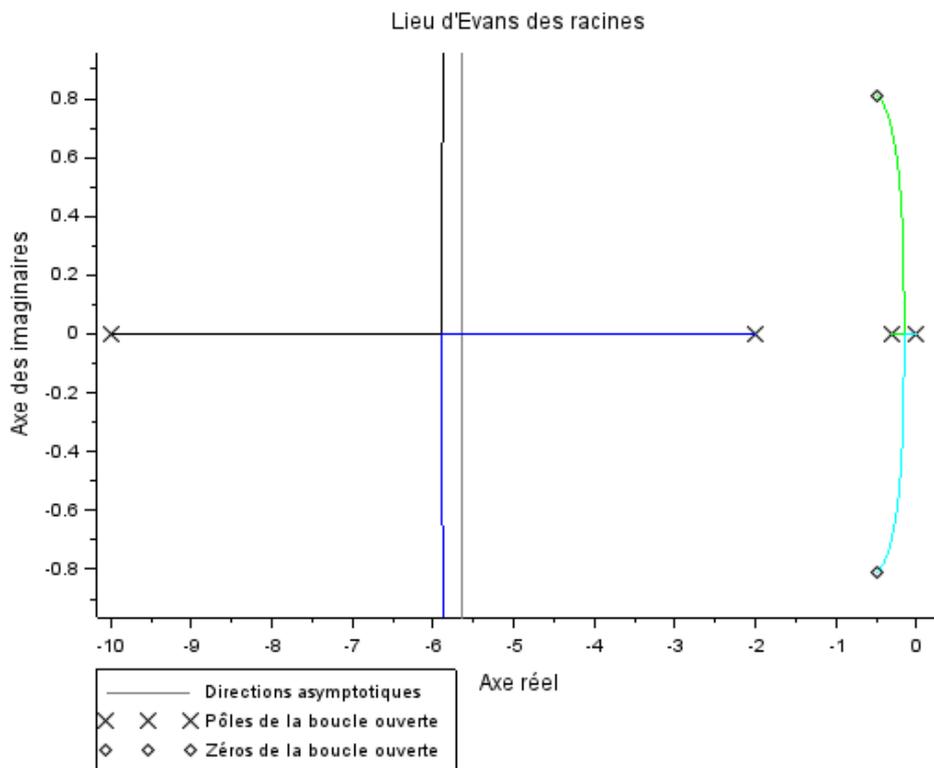
On a la FTBO qui s'écrit :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \left(\frac{K_{\delta d} p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{K_{\delta i}}{p} + K_{\delta} \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec dans un premier temps $K_{\delta d} = K_{\delta i} = K_{\delta} = K_{\delta dip}$.

Donc on a :

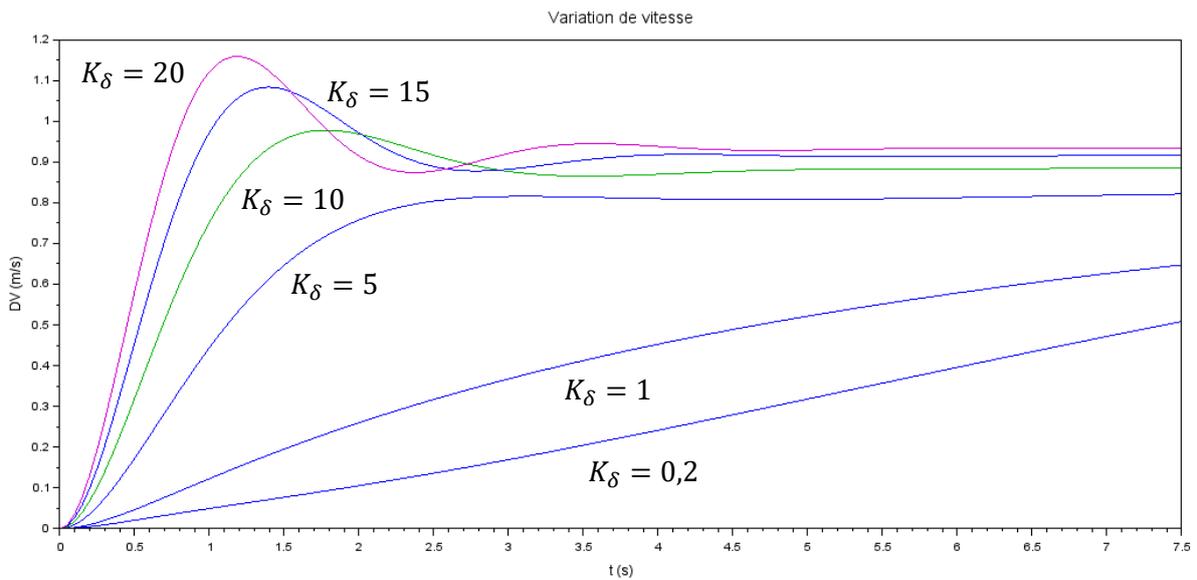
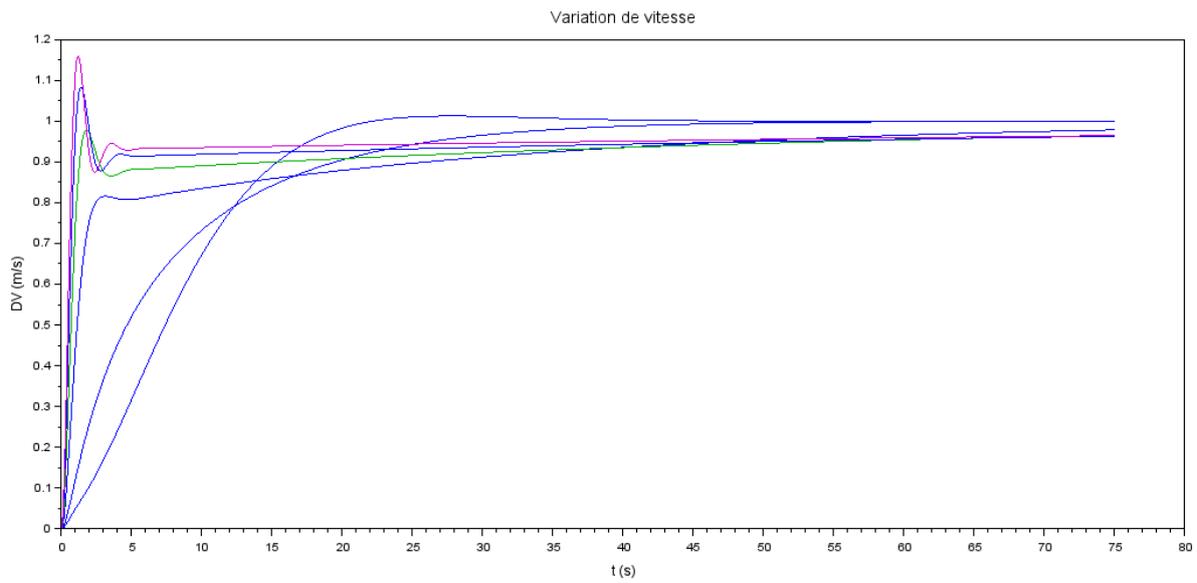
$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= K_{\delta dip} \left(\frac{p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{1}{p} + 1 \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \\ &= K_{\delta dip} \frac{p^2 + 1 + \tau_{\delta d} p + p(1 + \tau_{\delta d} p)}{p(1 + \tau_{\delta d} p)} \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \end{aligned}$$



28- Quel avantage a-t-on par rapport à au cas précédent ?

Il semble que les oscillations soient légèrement mieux amorties avec l'augmentation du gain (les racines proches de l'axe des ordonnées ont une partie réelle un peu plus négative).

Partant des valeurs $K_{\delta d} = K_{\delta i} = 0,2$, on règle le gain K_{δ} :

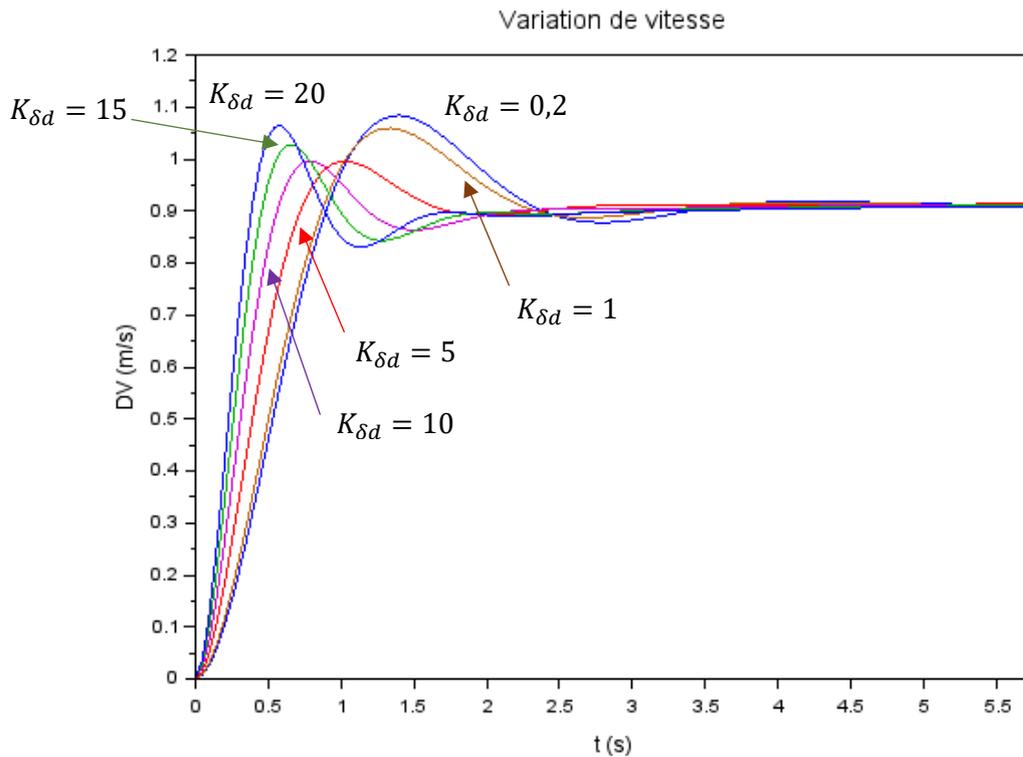


Zoom du graphe précédent.

29- Quelle valeur de gain parait être la plus adaptée ?

En termes de rapidité et dépassement on peut partir sur la valeur compromis de 15.

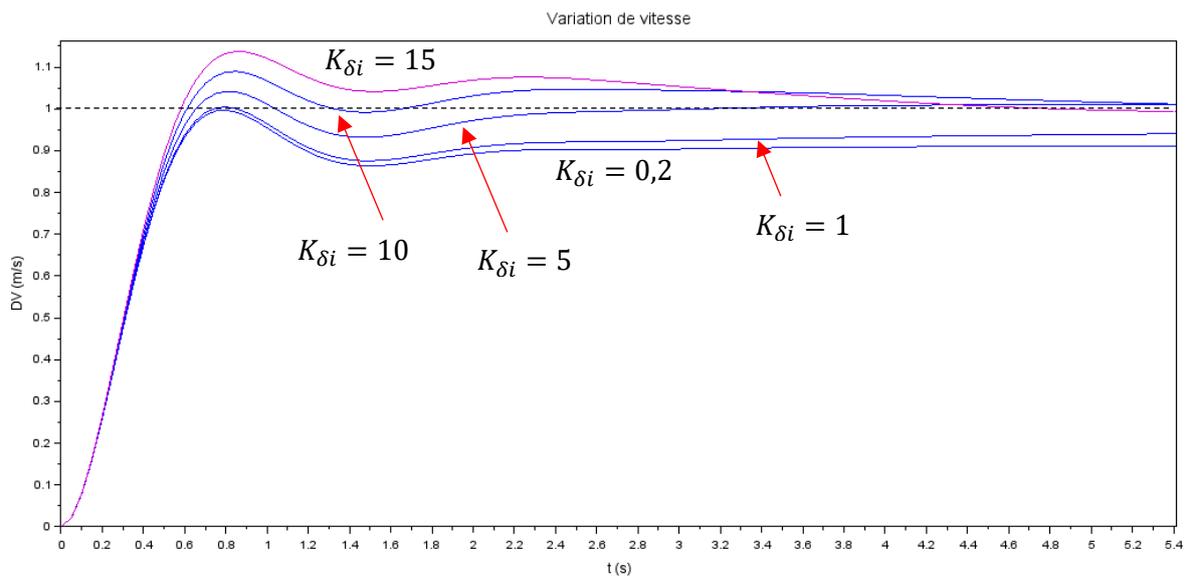
Partant de cette valeur, on règle la valeur du gain $K_{\delta d}$:



30- Quelle valeur de gain parait être la plus adaptée ?

En termes de rapidité et dépassement on peut partir sur la valeur compromis de 10.

En partant de cette valeur de gain, on règle la valeur du gain $K_{\delta i}$:



31- Quelle valeur de gain parait être la plus adaptée ?

Le set de gains qui parait répondre aux critères est donc : $K_{\delta} = 15$, $K_{\delta d} = 10$, $K_{\delta i} = 5$.

32- A quoi faut-il prêter tout de même attention en pratique avec les valeurs de gain ?

Il ne faut que les valeurs soient trop élevées pour éviter d'une part que le système ait trop d'autorité aux commandes et qu'en cas de panne le pilote ne puisse pas reprendre rapidement le contrôle de la voiture ; et d'autre part physiquement les mécanismes ne peuvent pas avoir de gains infinis, ces limitations sont à prendre en compte.

33- Quelle hypothèse a-t-on fait sur la boucle retour (retour unitaire) ?

En pratique, pour connaître la vitesse de la voiture, il faudrait intégrer un capteur. Il est clair que le capteur n'est pas parfait comme on l'a supposé en écrivant implicitement que sa fonction de transfert valait 1.

On aurait donc pu intégrer l'effet d'une erreur de mesure, d'un retard, du fait qu'il ne puisse pas mesurer les variations hautes fréquences de la vitesse, etc.